إجابات تدريبات الدرس

المشتقة الأولى

تدريب ١

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ ، فجد $\text{قَ}(-١)$.

٢) إذا كان $\text{قَ}(٠) = ٦$، فجد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(٥\text{هـ})}{٣\text{هـ}}$

الحل

١) $\text{قَ}(-١) = \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(-١)}{\text{س} - -١}$

$$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - \left((-١)^{٣} + ٢ \times -١\right)}{\text{س} + ١}$$

$$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - (-١ - ٢)}{\text{س} + ١}$$

$$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ١} + \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} + ٢}{\text{س} + ١}$$

$$= \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} + ١)}(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)}{\cancel{\text{س} + ١}} + \underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س} + ١)}}{\cancel{\text{س} + ١}}$$

$$= (١ + ١ + ١) + ٢ = ٥$$

٢) بفرض أنَّ $\text{م} = ٥\text{هـ} \Leftarrow \text{هـ} = \dfrac{\text{م}}{٥}$

عندما $\text{هـ} \to ٠$ ، فإنَّ $\text{م} \to ٠$.

$$\underset{\text{م} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(\text{م})}{٣ \times \frac{\text{م}}{٥}} = \dfrac{٥}{٣} \times - \underset{\text{م} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(٠)}{\text{م}}$$

$$= \dfrac{٥}{٣} \times \text{قَ}(٠) = \dfrac{٥}{٣} \times -٦ = -١٠$$

تدريب ٢

إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}+١}$، فجد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\text{س} = ٢$

الحل

$$\text{ق}'(٢) = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\dfrac{\text{س}}{\text{س}+١} - \dfrac{٢}{٣}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\dfrac{٣\text{س} - ٢(\text{س}+١)}{٣(\text{س}+١)}}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{٣\text{س} - ٢\text{س} - ٢}{٣(\text{س}+١)} \times \frac{١}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\cancel{\text{س} - ٢}}{٣(\text{س}+١)} \times \frac{١}{\cancel{\text{س} - ٢}} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{١}{٣(\text{س}+١)}$$

$$= \frac{١}{٣(٢+١)} = \frac{١}{٣\times٣} = \frac{١}{٩}$$

تدريب ٣

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س}+١ & ، \; -٣ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}+٣ & ، \; ١ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$

جد ق$'$(−١) ، ق$'$(١) إن وجدت.

الحل

$$\text{ق}'(-١) = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(-١)}{\text{س}+١}$$

$$= \lim_{\text{س}\to -١} \frac{٤\text{س}+١ - (٤\times -١ + ١)}{\text{س}+١}$$

$$= \lim_{\text{س}\to -١} \frac{٤\text{س}+١+٣}{\text{س}+١} = \lim_{\text{س}\to -١} \frac{٤\text{س}+٤}{\text{س}+١}$$

$$= \frac{٤\cancel{(\text{س}+١)}}{\cancel{\text{س}+١}} = ٤$$

عند س = ١ نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$$\text{ق}'(١)^{+} = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} + ٣ - ٥}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٢$$

$$\text{ق}'(١)^{-} = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{٤\text{س} + ١ - ٥}{\text{س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{٤\text{س} - ٤}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{٤\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٤$$

ق'(١) غير موجودة لأن

$\text{ق}'(١)^{+} \neq \text{ق}'(١)^{-}$.

تدريب ٤

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}$ فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{٢}+٨} - \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٨}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}(\text{س}^{٢}+٨) - \text{س}(\text{ع}^{٢}+٨)}{(\text{ع}^{٢}+٨)(\text{س}^{٢}+٨)} \times \frac{١}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\text{س}^{٢} + ٨\text{ع} - \text{ع}^{٢}\text{س} - ٨\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٨)(\text{ع}^{٢}+٨)} \times \frac{١}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}\text{س}^{٢} - \text{ع}^{٢}\text{س} + ٨\text{ع} - ٨\text{س}}{(\text{ع}^{٢}+٨)(\text{س}^{٢}+٨)} \times \frac{١}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \left(\frac{\text{ع س} \cancel{(\text{س} - \text{ع})}^{-1}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \frac{٨ \cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} \right) \times \frac{1}{(\text{ع}^2 + ٨)(\text{س}^2 + ٨)}$$

$$= \left(\lim_{\text{ع} \to \text{س}} (-\text{ع س}) + ٨ \right) \times \frac{1}{(\text{س}^2 + ٨)^2}$$

$$= (-\text{س}^2 + ٨) \times \frac{1}{(\text{س}^2 + ٨)^2}$$

$$= \frac{-\text{س}^2 + ٨}{(\text{س}^2 + ٨)^2}$$

تدريب ٥

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

الحل

المساحة $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^2$

المطلوب $\text{م}'(٢٠)$.

$$\text{م}'(٢٠) = \lim_{\text{س} \to ٢٠} \frac{\text{م}(\text{س}) - \text{م}(٢٠)}{\text{س} - ٢٠} = \lim_{\text{س} \to ٢٠} \frac{\text{س}^2 - (٢٠)^2}{\text{س} - ٢٠}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢٠} \frac{(\text{س} + ٢٠)\cancel{(\text{س} - ٢٠)}}{\cancel{\text{س} - ٢٠}} = \lim_{\text{س} \to ٢٠} (\text{س} + ٢٠)$$

$$= ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$$