إجابات تدريبات الدرس

المشتقة الأولى

تدريب ١

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٢س$ ، فجد $قَ(-١)$.

٢) إذا كان $قَ(٠) = ٦$، فجد $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \dfrac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{٣هـ}$

الحل

١) $$قَ(-١) = \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{ق(س) - ق(-١)}{س - -١}$$

$$= \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{س^{٣} + ٢س - ((-١)^{٣} + ٢ \times -١)}{س + ١}$$

$$= \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{س^{٣} + ٢س - (-١ - ٢)}{س + ١}$$

$$= \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{س^{٣} + ١}{س + ١} + \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{٢س + ٢}{س + ١}$$

$$= \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{\cancel{(س + ١)}(س^{٢} - س + ١)}{\cancel{س + ١}} + \underset{س \to -١}{نهـا} \dfrac{٢\cancel{(س + ١)}}{\cancel{س + ١}}$$

$$= (١ + ١ + ١) + ٢ = ٥$$

٢) بفرض أنَّ $م = ٥هـ \Leftarrow هـ = \dfrac{م}{٥}$

عندما $هـ \to ٠$ ، فإنَّ $م \to ٠$.

$$\underset{م \to ٠}{نهـا} \dfrac{ق(٠) - ق(م)}{٣ \times \dfrac{م}{٥}} = \dfrac{٥}{٣} \times - \underset{م \to ٠}{نهـا} \dfrac{ق(م) - ق(٠)}{م}$$

$$= \dfrac{٥}{٣} \times قَ(٠) = \dfrac{٥}{٣} \times -٦ = -١٠$$

تدريب ٢

إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند $\text{س} = ٢$

الحل

$$\text{ق}'(٢) = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+١} - \frac{٢}{٣}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\frac{٣\text{س} - ٢(\text{س}+١)}{٣(\text{س}+١)}}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - ٢\text{س} - ٢}{٣(\text{س}+١)} \times \frac{١}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{س} - ٢}}{٣(\text{س}+١)} \times \frac{١}{\cancel{\text{س} - ٢}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{٣(\text{س}+١)}$$

$$= \frac{١}{٣(٢+١)} = \frac{١}{٣\times٣} = \frac{١}{٩}$$

تدريب ٣

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س}+١ & ،\ -٣ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}+٣ & ،\ ١ \le \text{س} \le ٥ \end{cases}$

جد $\text{ق}'(-١)$ ، $\text{ق}'(١)$ إن وجدت.

الحل

$$\text{ق}'(-١) = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(-١)}{\text{س}+١}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}+١ - (٤\times -١ + ١)}{\text{س}+١}$$

$$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}+١+٣}{\text{س}+١} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}+٤}{\text{س}+١}$$

$$= \frac{٤\cancel{(\text{س}+١)}}{\cancel{\text{س}+١}} = ٤$$

عند س = ١ نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$$\text{ق}'(١)^{+} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢\text{س} + ٣ - ٥}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٢$$

$$\text{ق}'(١)^{-} = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{٤\text{س} + ١ - ٥}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{٤\text{س} - ٤}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{٤\cancel{(\text{س} - ١)}}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٤$$

ق'(١) غير موجودة لأن

$\text{ق}'(١)^{+} \neq \text{ق}'(١)^{-}$.

تدريب ٤

إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}$ فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\frac{\text{ع}}{\text{ع}^{٢} + ٨} - \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٨}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}(\text{س}^{٢} + ٨) - \text{س}(\text{ع}^{٢} + ٨)}{(\text{ع}^{٢} + ٨)(\text{س}^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}\text{س}^{٢} + ٨\text{ع} - \text{ع}^{٢}\text{س} - ٨\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٨)(\text{ع}^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}\text{س}^{٢} - \text{ع}^{٢}\text{س} + ٨\text{ع} - ٨\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ٨)(\text{ع}^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع\,س\,(\cancel{س - ع})}{\cancel{ع - س}} + \frac{8\,(\cancel{س - ع})}{\cancel{ع - س}} \times \frac{1}{(ع^2+8)(س^2+8)}$$

$$= \left(\lim_{ع \to س} (-ع\,س) + 8\right) \times \frac{1}{(س^2+8)^2}$$

$$= (-س^2 + 8) \times \frac{1}{(س^2+8)^2}$$

$$= \frac{-س^2 + 8}{(س^2+8)^2}$$

تدريب ٥

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

الحل

المساحة $م(س) = س^2$

المطلوب $مَ(٢٠)$.

$$مَ(٢٠) = \lim_{س \to ٢٠} \frac{م(س) - م(٢٠)}{س - ٢٠} = \lim_{س \to ٢٠} \frac{س^2 - (٢٠)^2}{س - ٢٠}$$

$$= \lim_{س \to ٢٠} \frac{(س + ٢٠)(\cancel{س - ٢٠})}{\cancel{س - ٢٠}} = \lim_{س \to ٢٠} (س + ٢٠)$$

$$= ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$$