

إجابات تمارين ومسائل الدرس

المعدلات المرتبطة بالزمن

(١) مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠٠١ سم/ث، جد معدل التغير في كل من حجمه ومساحته الكلية؛ عندما يكون طول ضلعه ١٠ سم.



الحل

$$\begin{aligned} 0,0001 &= \frac{ds}{dt} \\ &= \left| \frac{ds}{dt} \right|_{s=10} = \left| \frac{ds}{dt} \right|_{s=10} \end{aligned}$$

الحل:

$$e = s^2 \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2s}{s^3} \times 3s^2 = \frac{6s}{s^3}$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=10} = \frac{6}{10^3} = 0,0006 \text{ سم/ث}$$



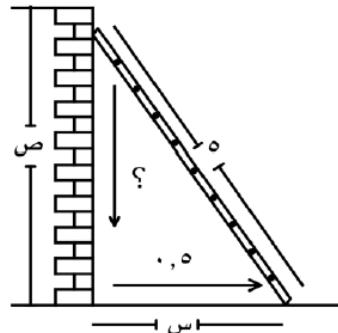
$$e = s^2 \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2s}{s^3} \times 2s = \frac{4s}{s^3}$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=10} = \frac{4}{10^3} = 0,0004 \text{ سم/ث}$$

(٢) يرتكز سلم طوله ٥ أمتار بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{1}{4}$ م/ث، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم؛ عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣ م عن الحائط.



الحل



طول السلم = ٥

$$\frac{1}{4} = \frac{dx}{dt}$$

$$= \left| \frac{dx}{dt} \right|_{x=3}$$

الحل:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

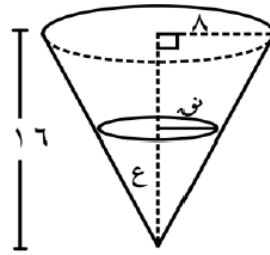
$$\frac{ds}{dt} \times 2s = \frac{2x}{s} \times \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{x}{s^2} \times \frac{dx}{dt}$$

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{x=3} = \frac{3}{9-25} \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} \text{ م/ث}$$



٣) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى، فإذا كان ارتفاع القمع ١٦ سم، وطول نصف قطر قاعدته ٨ سم، صُبَّ فيه سائل بمعدل ١٢ سم^٣/ث، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨ سم.

منهاجي
متعة التعليم الهادف



الحل

ارتفاع القمع = ١٦

$$١٢ = \frac{عس}{نس} ، ٨ = نوه$$

مساحة سطح السائل = π نوه^٢

$$= \left| \frac{٢س}{نس} \right|_{٨=ع}$$

من خلال تشابه المثلثات $\frac{١٦}{ع} = \frac{٨}{نوه} \leftarrow نوه = \frac{١}{٢} ع$

$$ع = \frac{١}{٣} \pi \left(\frac{١}{٢} ع \right)^2 \leftarrow ع = \frac{\pi}{١٢} ع^3$$

$$\frac{عس}{نس} \times ٦٤ \times \frac{\pi}{٤} = ١٢ \leftarrow \frac{عس}{نس} \times ٢ \frac{\pi}{٤} = \left| \frac{عس}{نس} \right|_{٨=ع}$$

$$\frac{عس}{\pi ٤} = \frac{٣}{نس}$$

$$\frac{عس}{نس} \times ٤ \times \frac{\pi}{٢} = \frac{٢س}{نس} \leftarrow \frac{س نوه}{نس} \times \pi ٢ = \frac{٢س}{نس}$$

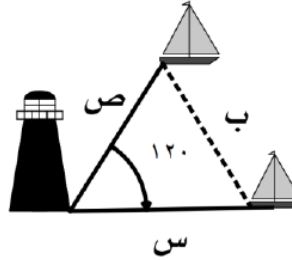
$$\frac{٢س}{نس} = \frac{٣}{\pi ٤} \times \pi ٤ = \left| \frac{٢س}{نس} \right|_{٨=ع}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٤) انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما (١٢٠°)، إذا كانت سرعة الأولى ٣٠ كم/ساعة، وسرعة الثانية ٤٠ كم/ساعة، فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعداهما عن نقطة الانطلاق ٦ كم، ٨ كم على الترتيب.



الحل

$$30 = \frac{ص}{س}, \quad 40 = \frac{ب}{س}$$

$$= \frac{ب}{ص} \quad \begin{matrix} 6=ص, 8=ب \\ 6=س \end{matrix}$$

$$ب^2 = 2ص^2 + 2س^2 - 2صس \text{ جتا } 120^\circ$$

$$ب^2 = 2ص^2 + 2س^2 + صس$$

$$2ب^2 = 2\left(\frac{ص}{س}\right)^2 + 2\left(\frac{ب}{س}\right)^2 + 2\left(\frac{ص}{س}\right)\left(\frac{ب}{س}\right)$$

لاكن ب عندما ص = ٨ ، س = ٦

$$2ب^2 = 148 \leftarrow 148 = 8 \times 6 + 6 \times 4 + 36 = 2ب^2$$

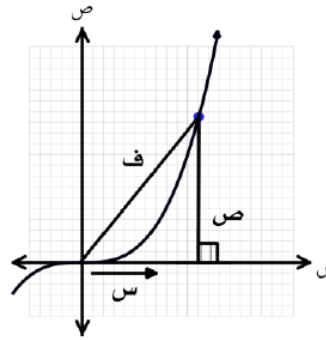
$$\frac{30 \times 8 + 40 \times 6 + 40 \times 8 \times 2 + 30 \times 6 \times 2}{148 \times 2} = \frac{ب}{س}$$

$$\frac{ب}{س} = \frac{1480}{148 \times 2} \text{ كم/ث}$$

٥) بدأت النقطتان أ، ب الحركة معاً من نقطة الأصل (م)؛ بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث، وتتحرك النقطة أ في الربع الأول على منحنى الاقتران

ق(س) = س^٣، بحيث تبقى \overline{AB} دائماً عمودية على محور السينات الموجب، جد:
أ) معدل التغير في مساحة المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.
ب) معدل التغير في طول وتر المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

الحل



$$\frac{ds}{dt} = 2 \leftarrow s = 2 \quad \frac{ds}{dt} = 2$$

$$v = 2s \quad \text{و } (s) = s^3$$

$$v = 2 \times 8 = 16$$

المطلوب

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} s^2 \right) = \frac{1}{2} \times 2s \times \frac{ds}{dt} = s \times \frac{ds}{dt}$$

$$= 2 \times 16 = 32 \quad \leftarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2 = 64$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} s^2 \right) = \frac{1}{2} \times 2 \times 32 = 32 \quad \leftarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 32 = 32$$

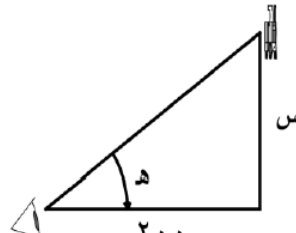
$$f = s^2 + v^2 \leftarrow f = 2^2 + 16^2 = 264$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2s \frac{ds}{dt} + 2v \frac{dv}{dt}}{2} = \frac{2 \times 8 \times 2 + 2 \times 16 \times 2}{2} = 196$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{196}{2} = 98 \quad \leftarrow \frac{196}{2} = 98$$

٦) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أطلق صاروخ عمودياً لأعلى بسرعة ١٠٠ م/ث، وعلى بعد ٢٠٠ متر من نقطة انطلاق الصاروخ، كان مشاهد جالساً على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الأرض.



الحل

$$\frac{100}{س} = \frac{س}{س}$$

$$= \frac{س}{س} \Big|_{س=400}$$

الحل:

$$\frac{س}{200} = \frac{س}{س} \leftarrow \frac{س}{س} \times \frac{1}{200} = \frac{س}{س} \times \frac{1}{س}$$

$$\frac{س}{200} = \frac{س}{س} \leftarrow \frac{س}{س} \times \frac{1}{200} = \frac{س}{س} \times \frac{1}{س}$$

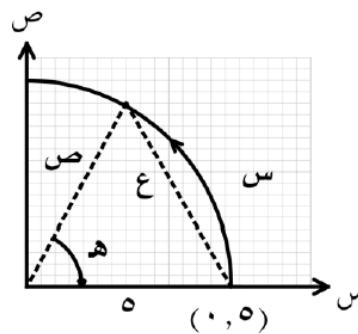
$$\frac{س}{200} = \frac{س}{س} \leftarrow \frac{س}{س} \times \frac{1}{200} = \frac{س}{س} \times \frac{1}{س}$$

$$\frac{س}{200} = \frac{س}{س} \leftarrow \frac{س}{س} \times \frac{1}{200} = \frac{س}{س} \times \frac{1}{س}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{س}{س} \leftarrow 100 \times \frac{1}{200} = \frac{س}{س} \times 5$$

٧) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (٥، ٥) باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١٠ سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥، ٥)؛ عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية

مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ راد.



الحل

$$\frac{10}{س} = \frac{س}{س}$$

ص = ٥ لأنها نوه الدائرة المطلوب:

$$= \frac{س}{س} \Big|_{س=5}$$

الحل:

$$ع = 2(5) + 2(5) - 2(5) \times 5 \times 5 \times 5$$

$$ع = 2(5) - 50 = 50$$

$$2(5) \times 5 = \frac{س}{س} \times 50$$

$$ع = \sqrt{20} = \frac{\pi}{3} \times 5 = 5 \times \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{س}{س} \text{ لإيجاد}$$

تذكر : طول القوس

$$س = نو \times ه = ه \times ع \leftarrow \frac{س}{س} \times ع = \frac{س}{س}$$

$$2 = \frac{س}{س} \leftarrow \frac{س}{س} \times ع = 10$$

$$ع \times 2 = \frac{س}{س} \leftarrow 2 \times \frac{\pi}{3} \times 5 = \frac{س}{س} \times 20$$

٨) تتمدد أضلاع مربع بمعدل ٤ سم/ث، رُسمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه، وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع، عندما يكون طول ضلع المربع ١٠ سم.

الحل

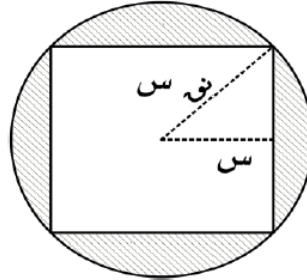
$$٤ = \frac{س}{س}$$

المطلوب :

$$٢ = \text{مساحة المربع}$$

$$٢ = \text{مساحة الدائرة}$$

$$٢ = \text{المساحة المنطقة المحصورة}$$



$$\frac{س}{س} - \frac{س}{س} = \frac{س}{س}$$

$$٢ = \pi \text{ نو} - ٢$$

ولكن :

$$\text{نو} = \left(\frac{س}{٢}\right)^2 + \left(\frac{س}{٢}\right)^2 \leftarrow \text{نو} = \frac{س}{٢}$$

$$٢ = \pi \frac{س}{٢} - ٢$$

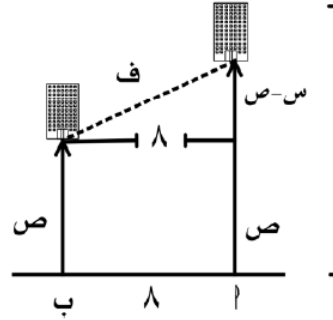
$$\frac{س}{س} \times ٢ - \frac{س}{س} \times \frac{\pi}{٢} \times ٢ = \frac{س}{س}$$

$$٤ \times ١٠ \times ٢ - ٤ \times ١٠ \times \frac{\pi}{٢} \times ٢ = \frac{س}{س}$$

$$= ٨٠ - \pi ٤٠ =$$

٩) مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي، المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٢ م/ث، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١ م/ث. جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني.

الحل



$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{S}{2} \\ \leftarrow S &= (2+t)^2 \\ 4 + 2t &= \frac{S}{2} \\ \leftarrow S &= 2t \\ \text{المطلوب: } \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{S}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f = \sqrt{64 + (S-2)^2}$$

$$f = \sqrt{64 + (2 - 4 + 2t)^2}$$

$$\leftarrow f = \sqrt{64 + (4+t)^2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2(4+t)}{\sqrt{64 + (4+t)^2}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{6}{10} = \frac{6}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{dS}{dt}$$