إجابات تمارين ومسائل الدرس

التزايد والتناقص

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٤س − س^{٢} ، س $\in$ ح.

ب) ق(س) = $|$س^{٢} − ٩$|$ ، س $\in$ [−٥ ، ٥]

جـ) ق(س) = جتا^{٢}س ، س $\in$ [٠ ، ٢π]

د) ق(س) = (١ − س)^{٣} ، س $\in$ ح.

هـ) ق(س) = (٢ − س)^{٤} ، س $\in$ ح.

و) ق(س) = $\sqrt{\text{٢٥ − س}^{٢}}$ ، س $\in$ [−٥ ، ٥]

ز) ق(س) = $\sqrt[٣]{(\text{س − ٤})^{٢}}$ ، س $\in$ ح.

ح) ق(س) = جتا س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س ، س $\in$ [٠ ، ٢π]

ط) ق(س) = $\begin{cases} \text{٣ − س}^{٢} & \text{، س} \le ١ \\ \frac{٢}{\text{س}} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

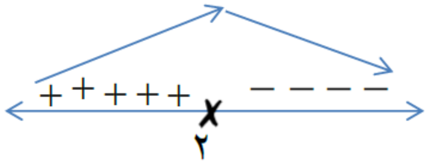
ي) $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} ، & س < ١ \\ \frac{٣}{س} ، & س \ge ١ \end{cases}$

الحل

أ) $ه(س) = ٤س - س^{٢} ، س \in ح$

$ه'(س) = ٤ - ٢س$

$ه'(س) = ٠ \leftarrow ٤ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٢$



فترات التزايد $(-\infty ، ٢]$

فترات التناقص $[٢ ، \infty)$

ب) $ه(س) = |س^{٢} - ٩| ، س \in [-٥ ، ٥]$

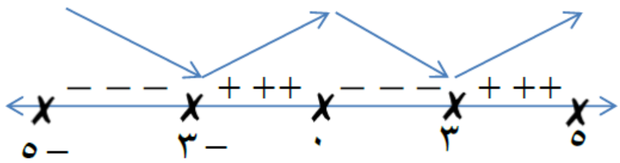
$س^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow س = \pm ٣$

$ه(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٩ ، & -٥ \le س < -٣ \\ ٩ - س^{٢} ، & -٣ \le س < ٣ \\ س^{٢} - ٩ ، & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٢س ، & -٥ < س < -٣ \\ -٢س ، & -٣ < س < ٣ \\ ٢س ، & ٣ < س < ٥ \end{cases}$

$ه'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$

$ه'(س)$ غير موجودة عند $س = \pm ٣$



فترات التزايد : $[-٣ ، ٠] \cup [٣ ، ٥]$

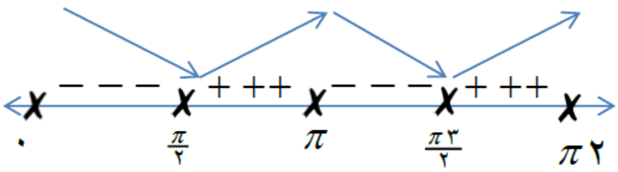
فترات التناقص : $[-٥ ، -٣] \cup [٠ ، ٣]$

جـ) $ه(س) = جتا^{٢} س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

$ه'(س) = -٢ جتاس جاس$

$ه'(س) = ٠ \leftarrow -٢ جتاس جاس = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢} ، \pi ، \frac{٣\pi}{٢}$ و غير موجودة عند $س = ٠ ، ٢\pi$



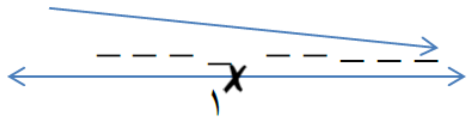
فترات التزايد : $[\frac{\pi}{٢}، \pi] \cup [\frac{٣\pi}{٢}، ٢\pi]$

فترات التناقص : $[٠، \frac{\pi}{٢}] \cup [\pi، \frac{٣\pi}{٢}]$

د) $ق(س) = (١ - س)^{٣}$ ، $س \in ح$

$ق'(س) = -٣(١ - س)^{٢}$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow س = ١$

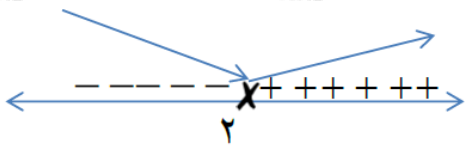


$ق(س)$ متزايد لكل $س \in ح$

هـ) $ق(س) = (٢ - س)^{٤}$ ، $س \in ح$

$ق'(س) = -٤(٢ - س)^{٣}$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$

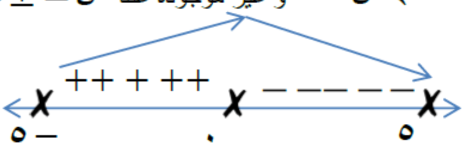


متزايد على الفترة $[٢، \infty)$ ، متناقص على الفترة $(-\infty، ٢]$

و) $ق(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٥، ٥]$

$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$ و غير موجودة عند $س = \pm ٥$

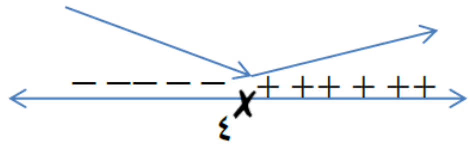


متزايد على الفترة $[-٥، ٠]$ متناقص على الفترة $[٠، ٥]$

ز) $ق(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $س \in ح$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣(س - ٤)^{\frac{١}{٣}}}$

$ق'(س) \neq ٠$ ولاكن $ق'(س)$ غير موجودة عند $س = ٤$



متزايد على الفترة $(-\infty ، ٤]$ ، متناقص على الفترة $[٤ ، \infty)$

ح) $ق(س) = جتاس - \frac{١}{٢} جتا٢س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

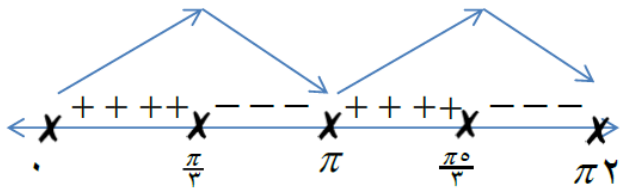
$ق'(س) = -جاس + جا٢س$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow -جاس + جا٢س = ٠$

$٢جاس جتاس - جاس = ٠ \leftarrow جاس(٢جتاس - ١) = ٠$

$جاس = ٠ \leftarrow س = ٠ ، \pi$

$٢جتاس - ١ = ٠ \leftarrow جتاس = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}$



متزايد على الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٣}] \cup [\pi ، \frac{٥\pi}{٣}]$

متناقص على الفترة $[\frac{\pi}{٣} ، \pi] \cup [\frac{٥\pi}{٣} ، ٢\pi]$

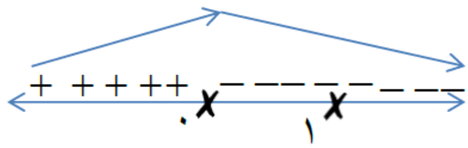
ط)

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^{٢} & ، س \leq ١ \\ \frac{٢}{س} & ، س > ١ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢س & ، س < ١ \\ \frac{-٢}{س^{٢}} & ، س > ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

$ق'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$



متزايد على الفترة : $(-\infty ، ٠]$

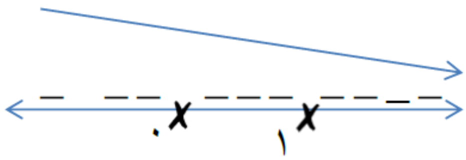
متناقص على الفترة : $[١ ، \infty)$

ي) $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} \text{ ، } & س \le ١ \\ \dfrac{٣}{س} \text{ ، } & س > ١ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} \text{ ، } & س < ١ \\ \dfrac{-٣}{س^{٢}} \text{ ، } & س > ١ \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

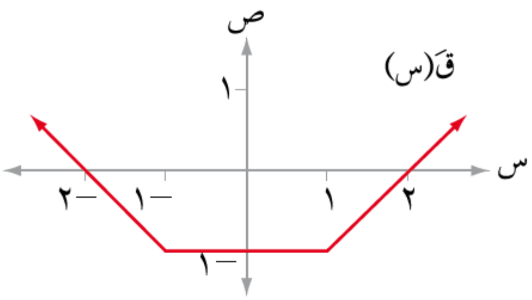
$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$



الأقتران متناقص لكل س∈ح

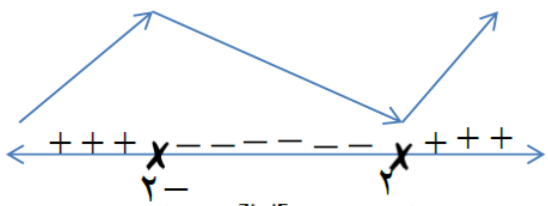
---

٢) يمثل الشكل (٣−١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.



الشكل (٣−١٢)

الحل



متزايد على الفترة: $(-\infty ، -٢] \cup [٢ ، \infty)$

متناقص على الفترة : $[-٢ ، ٢]$

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + س^٣، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

الحل

هَ(س) = قَ(س) + ٣س^٢

ولا كن قَ(س) > ٠ على الفترة (أ ، ب)

و ٣س^٢ > ٠ على الفترة (أ ، ب)

فيكون ← هَ(س) > ٠ على الفترة

∴ هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب]