إجابات تمارين ومسائل الدرس

التزايد والتناقص

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = ٤س - س^٢$ ، $س \in ح$.

ب) $ق(س) = |س^٢ - ٩|$ ، $س \in [-٥ ، ٥]$

جـ) $ق(س) = جتا^٢ س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

د) $ق(س) = (١ - س)^٣$ ، $س \in ح$.

هـ) $ق(س) = (٢ - س)^٤$ ، $س \in ح$.

و) $ق(س) = \sqrt{٢٥ - س^٢}$ ، $س \in [-٥ ، ٥]$

ز) $ق(س) = \sqrt[٣]{(س - ٤)^٢}$ ، $س \in ح$.

ح) $ق(س) = جتا س - \frac{١}{٢} جتا ٢س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ط) $ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ & ، س \leq ١ \\ \frac{٢}{س} & ، س > ١ \end{cases}$

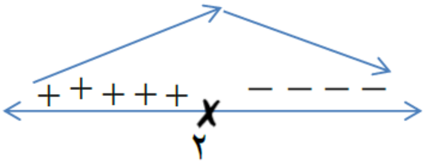
ي) $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} ، & س < ١ \\ \frac{٣}{س} ، & س \geq ١ \end{cases}$

الحل

أ) $ه(س) = ٤س - س^{٢}$ ، $س \in ح$

$ه'(س) = ٤ - ٢س$

$ه'(س) = ٠ \leftarrow ٤ - ٢س = ٠ \leftarrow س = ٢$



فترات التزايد $(-\infty ، ٢]$

فترات التناقص $[٢ ، \infty)$

ب) $ه(س) = |س^{٢} - ٩|$ ، $س \in [-٥ ، ٥]$

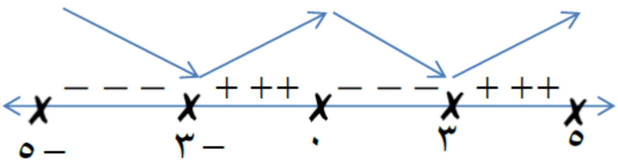
$س^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow س = \pm ٣$

$ه(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٩ ، & -٥ \leq س < -٣ \\ ٩ - س^{٢} ، & -٣ \leq س < ٣ \\ س^{٢} - ٩ ، & ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٢س ، & -٥ < س < -٣ \\ -٢س ، & -٣ < س < ٣ \\ ٢س ، & ٣ < س < ٥ \end{cases}$

$ه'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$

$ه'(س)$ غير موجودة عند $س = \pm ٣$



فترات التزايد : $[-٣ ، ٠] \cup [٣ ، ٥]$

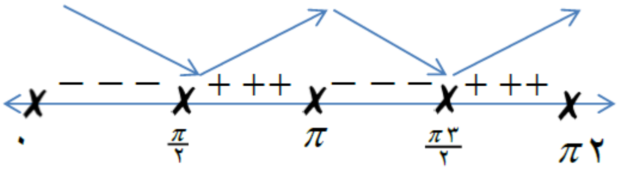
فترات التناقص : $[-٥ ، -٣] \cup [٠ ، ٣]$

جـ) $ه(س) = جتا^{٢}س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

$ه'(س) = -٢جتاس جاس$

$ه'(س) = ٠ \leftarrow -٢جتاس جاس = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ و غير موجودة عند $س = ٠$ ، ٢π



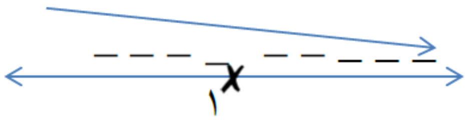
فترات التزايد : $[\frac{\pi}{٢}،\pi] \cup [\frac{٣\pi}{٢}،٢\pi]$

فترات التناقص : $[٠،\frac{\pi}{٢}] \cup [\pi،\frac{٣\pi}{٢}]$

د) $ق(س) = (١ - س)^{٣}$ ، $س \in ح$

$\bar{ق}(س) = -٣(١ - س)^{٢}$

$\bar{ق}(س) = ٠ \leftarrow س = ١$

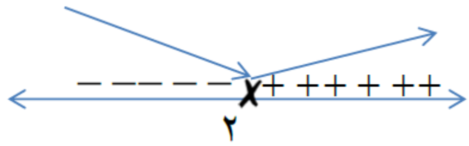


$ق(س)$ متزايد لكل $س \in ح$

هـ) $ق(س) = (٢ - س)^{٤}$ ، $س \in ح$

$\bar{ق}(س) = -٤(٢ - س)^{٣}$

$\bar{ق}(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$

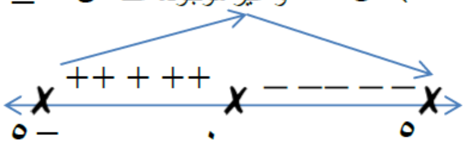


متزايد على الفترة $[٢،\infty)$ ، متناقص على الفترة $(-\infty،٢]$

و) $ق(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٥،٥]$

$\bar{ق}(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}$

$\bar{ق}(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$ و غير موجودة عند $س = \pm ٥$

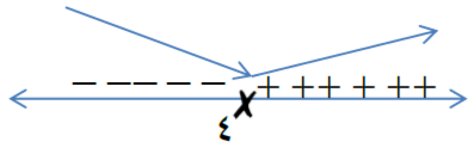


متزايد على الفترة $[-٥،٠]$ متناقص على الفترة $[٠،٥]$

ز) $ق(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $س \in ح$

$\bar{ق}(س) = \frac{٢}{٣(س - ٤)^{\frac{١}{٣}}}$

$\bar{ق}(س) \neq ٠$ ولاكن $\bar{ق}(س)$ غير موجودة عند $س = ٤$



متزايد على الفترة (−∞، ٤] ، متناقص على الفترة [٤، ∞)

ح) ق(س) = جتاس − $\frac{1}{2}$ جتا٢س ، س ∈ [٠، ٢π]

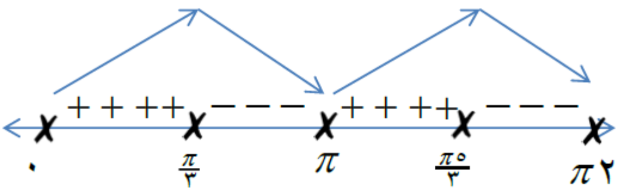
قَ(س) = − جاس + جا٢س

قَ(س) = ٠ ← − جاس + جا٢س = ٠

٢جاس جتاس − جاس = ٠ ← جاس (٢جتاس − ١) = ٠

جاس = ٠ ← س = ٠ ، π

٢جتاس − ١ = ٠ ← جتاس = $\frac{1}{2}$ ← س = $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$



متزايد على الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{3}$] ∪ [π ، $\frac{5\pi}{3}$]

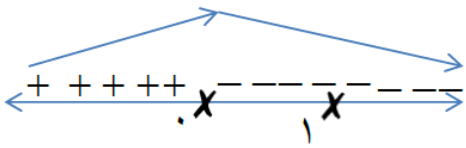
متناقص على الفترة [$\frac{\pi}{3}$ ، π] ∪ [$\frac{5\pi}{3}$ ، ٢π]

ط)
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣ - \text{س}^٢ & ، \text{س} \le ١ \\ \frac{٢}{\text{س}} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} -٢\text{س} & ، \text{س} < ١ \\ \frac{-٢}{\text{س}^٢} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

قَ(س) = ٠ ← س = ٠



متزايد على الفترة : (−∞، ٠]

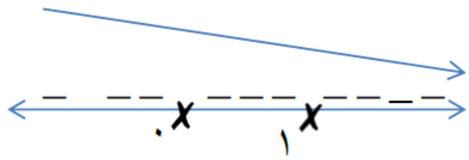
متناقص على الفترة : [١، ∞)

ي) $ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} ، & س \le ١ \\ \frac{٣}{س} ، & س > ١ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} ، & س < ١ \\ \frac{-٣}{س^{٢}} ، & س > ١ \end{cases}$

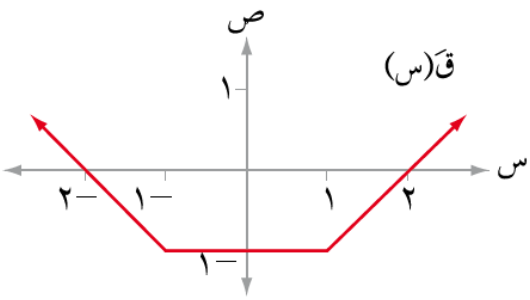
ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

ق'(س) = ٠ ← س = ٠



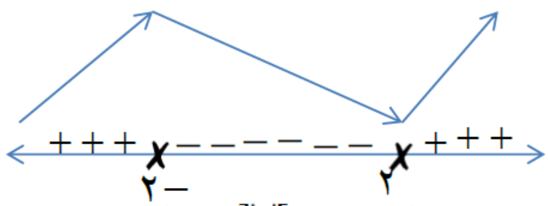
الأقتران متناقص لكل س∈ح

2) يمثل الشكل (٣-١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-١٢)

الحل



متزايد على الفترة: $(-\infty ، -٢] \cup [٢ ، \infty)$

متناقص على الفترة : $[-٢ ، ٢]$

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∈ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + س^٣، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

الحل

هـَ(س) = قَ(س) + ٣س^٢

ولا كن قَ(س) > ٠ على الفترة (أ ، ب)

و ٣س^٢ > ٠ على الفترة (أ ، ب)

فيكون ← هـَ(س) > ٠ على الفترة

∴ هـ(س) متزايد على الفترة [أ ، ب]