إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $ق(س) = \sqrt{٣٠}$ ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٤}$

الحل

أ) $ق'(س) = صفر$

ب) $ص' = ٤٠ س^{٩}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ (ثابت)

$ص' = صفر$.

د) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٤}$

$ق(س) = \frac{١}{١٦} س^{٤}$

$ق'(س) = \frac{١}{١٦} \times ٤ س^{٣}$

$= \frac{١}{٤} س^{٣}$.

٢) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$

ب) $\text{ص} = \frac{١}{٤}(\text{س}^{٢} + ٨)$

جـ) $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$

د) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}$

الحل

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٣$.

ب) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٤} \times ٢\text{س} + \text{صفر} = \frac{١}{٢}\text{س}$

جـ) $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤}{\cancel{٣}}\pi \times \cancel{٣}\,\text{س}^{٢} = ٤\pi\,\text{س}^{٢}$.

د) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}$.

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٤} \times ٤\text{س}^{٣} + \frac{١}{٣} \times ٣\text{س}^{٢} - ١$

$= \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ١$

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ، س = − ١

ب) ق(س) = س^{٢} + | ٣س − ٦ | ، س = ٣

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] − ٤س^{٢} ، س = ٢,٤

د) ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] − | س | ، س = − ١

الحل

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤ س^{٣} = ٢ س^{٣}

قَ(−١) = ٢(−١)^{٣} = ٢ × −١ = −٢

ب) ق(س) = س^{٢} + | ٣س − ٦ | ، س = ٣

| ٣س − ٦ | = ٣س − ٦ عندما س = ٣

ق(س) = س^{٢} + ٣س − ٦

قَ(س) = ٢س + ٣

قَ(٣) = ٦ + ٣ = ٩ .

جـ) [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢

[$\frac{١}{٢}$ س + ٥] = ٦ ، ٢ ≤ س < ٤ .

ق(س) = ٦ − ٤ س^{٢} .

قَ(س) = −٨س .

قَ(٢,٤) = −٨ × ٢,٤ = −١٩,٢

د) [س + ٠,١] = −١ حول س = −١

ق(س) = ٣س − ١ + س

ق(س) = ٤س − ١

قَ(س) = ٤

قَ(−١) = ٤ .

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢) = ٤ ، هـَ(−٢) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ (س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ (س) + س^{٣}

الحل

أ) ق(س) = ٦ل(س) − ٢هـ(س)

قَ(س) = ٦ لَ(س) − ٢هـَ(س)

قَ(−٢) = ٦ لَ(−٢) − ٢ هـَ(−٢)

= ٦×٤ − ٢×−٣

= ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ لَ(س) + هـَ(س) + ٣س^{٢} .

قَ(−٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ(−٢) + هـَ(−٢) + ٣(−٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ + −٣ + ١٢

= ٢ − ٣ + ١٢ = ١١

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب س &، س \leq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + أ س &، س > ١ \end{cases}$

وكانت قَ(١) موجودة، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ، ب.

الحل

قَ(١) موجودة ⇐ ق متصل عند س = ١

$\lim_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ١^{-}}$ ق(س)

$٤ - ب + أ = أ + ب$

$+ب - أ \qquad +ب - أ$

$\frac{٤}{٢} = \frac{٢ب}{٢} \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$

$قَ(١)^{+} = قَ(١)^{-}$

قَ(س) = $\begin{cases} ٢أس + ب &، س < ١ \\ -٢ب س + أ &، س > ١ \end{cases}$

$٢أ + ب = -٢ب + أ$

$٢أ + ٢ = -٤ + أ$

$-أ \qquad -أ$

$أ + ٢ = -٤ \Leftarrow \boxed{أ = -٦}$

---

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ل(س) &، س \leq جـ \\ لَ(جـ)\,(س - جـ) &، س > جـ \end{cases}$

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س = جـ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.

فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ، ثم جد قَ(جـ).

الحل

ق متصل عند س = جـ

قَ(س) = $\begin{cases} لَ(س) &، س < جـ \\ لَ(جـ) \times ١ &، س > جـ \end{cases}$

$قَ(جـ)^{+} = لَ(جـ)$

$قَ(جـ)^{-} = لَ(جـ)$

∴ قَ(جـ) موجودة = لَ(جـ).