إجابات أسئلة الدرس

قواعد الاشتقاق 1

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = $\sqrt{٣٠}$ ب) ص = ٤ س^{١٠}

جـ) ص = ٤ $\pi^{٢}$ د) ق(س) = $\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٤}$

الحل

أ) قَ(س) = صفر

ب) صَ = ٤٠ س^{٩}

جـ) ص = ٤ $\pi^{٢}$ (ثابت)

صَ = صفر .

د) ق(س) = $\left(\frac{١}{٢}س\right)^{٤}$

ق(س) = $\frac{١}{١٦}$ س^{٤}

قَ(س) = $\frac{١}{١٦}$ × ٤ س^{٣}

= $\frac{١}{٤}$ س^{٣} .

٢) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$

ب) $\text{ص} = \frac{١}{٤}(\text{س}^{٢} + ٨)$

جـ) $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$

د) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س}$

الحل

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٣ .$

ب) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٤} \times ٢\text{س} + \text{صفر} = \frac{١}{٢}\text{س}$

جـ) $\text{ص} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{س}^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤}{\cancel{٣}}\pi \times \cancel{٣}\,\text{س}^{٢} = ٤\pi\,\text{س}^{٢} .$

د) $\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \text{س} .$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٤} \times ٤\text{س}^{٣} + \frac{١}{٣} \times ٣\text{س}^{٢} - ١$

$= \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ١$

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ، س = −١

ب) ق(س) = س^{٢} + |٣س − ٦| ، س = ٣

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] − ٤س^{٢} ، س = ٢,٤

د) ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] − |س| ، س = −١

الحل

أ) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ × ٤ س^{٣} = ٢ س^{٣}

قَ(−١) = ٢(−١)^{٣} = ٢ × −١ = −٢

ب) ق(س) = س^{٢} + |٣س − ٦| ، س = ٣

|٣س − ٦| = ٣س − ٦ عندما س = ٣

ق(س) = س^{٢} + ٣س − ٦

قَ(س) = ٢س + ٣

قَ(٣) = ٦ + ٣ = ٩ .

جـ) [$\frac{١}{٢}$ س + ٥] ل = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢

[$\frac{١}{٢}$ س + ٥] = ٦ ، ٢ ≤ س < ٤ .

ق(س) = ٦ − ٤س^{٢} .

قَ(س) = −٨س .

قَ(٢,٤) = −٨ × ٢,٤ = −١٩,٢

د) [س + ٠,١] = −١ حول س = −١

ق(س) = ٣س − ١ + س

ق(س) = ٤س − ١

قَ(س) = ٤

قَ(−١) = ٤ .

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢) = ٤ ، هـَ(−٢) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ل(س) − ٢هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

الحل

أ) ق(س) = ٦ل(س) − ٢هـ(س)

قَ(س) = ٦ لَ(س) − ٢هـَ(س)

قَ(−٢) = ٦ لَ(−٢) − ٢ هـَ(−٢)

= ٦×٤ − ٢×−٣

= ٢٤ + ٦ = ٣٠

ب) ق(س) = $\frac{١}{٢}$ل(س) + هـ(س) + س^{٣}

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ لَ(س) + هـَ(س) + ٣س^{٢} .

قَ(−٢) = $\frac{١}{٢}$ لَ(−٢) + هـَ(−٢) + ٣(−٢)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$×٤ + −٣ + ١٢

= ٢ − ٣ + ١٢ = ١١

٥) إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ب س} & \text{، س} \leq ١ \\ ٤ - \text{ب س}^{٢} + \text{أ س} & \text{، س} > ١ \end{cases}$$

وكانت قَ(١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ ، ب.

الحل

قَ(١) موجودة ⟸ ق متصل عند س = ١

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ق(س)}$$

$$٤ - \text{ب} + \text{أ} = \text{أ} + \text{ب}$$

$$+\text{ب} - \text{أ} \qquad +\text{ب} - \text{أ}$$

$$\frac{٤}{٢} = \frac{٢\text{ب}}{٢} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٢}$$

$$\text{قَ}(١)^{+} = \text{قَ}(١)^{-}$$

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} ٢\text{أ س} + \text{ب} & \text{، س} < ١ \\ -٢\text{ب س} + \text{أ} & \text{، س} > ١ \end{cases}$$

$$٢\text{أ} + \text{ب} = -٢\text{ب} + \text{أ}$$

$$٢\text{أ} + ٢ = -٤ + \text{أ}$$

$$-\text{أ} \qquad -\text{أ}$$

$$\text{أ} + ٢ = -٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -٦}$$

---

٦) إذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{ل(س)} & \text{، س} \leq \text{جـ} \\ \text{لَ(جـ)(س} - \text{جـ)} & \text{، س} > \text{جـ} \end{cases}$$

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س = جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.

فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

الحل

ق متصل عند س = ٢

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{لَ(س)} & \text{، س} < \text{جـ} \\ \text{لَ(جـ)} \times ١ & \text{، س} > \text{جـ} \end{cases}$$

$$\text{قَ(جـ)}^{+} = \text{لَ(جـ)}$$

$$\text{قَ(جـ)}^{-} = \text{لَ(جـ)}$$

$$\therefore \text{قَ(جـ) موجودة} = \text{لَ(جـ)} .$$