

إجابات أسئلة الدرس

الاشتقاق الضمني

(١) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$

ب) $x^2 + 3y^2 = 3$

ج) $\sqrt{x^2 + 3y^2} = 2$

د) $(x^2 + y^2)^2 = 3$

الحل

أ) $x^2 + 4y^2 = 16$
 $\frac{d}{dx}(x^2 + 4y^2) = \frac{d}{dx}(16)$

$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$

$8y \frac{dy}{dx} = -2x$

ب) $x^2 + 3y^2 = 3$
 $\frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = \frac{d}{dx}(3)$

$2x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$

$6y \frac{dy}{dx} = -2x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{3y}$

$$(ج) \quad 1 \times c + c' s = c' c^3 + c^3 c'$$

$$c^3 - c = c' s - c' c^3$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = \frac{(s - c^3) c'}{s - c^3}$$

$$\frac{c^3 - c}{s - c^3} = c'$$

$$(د) \quad \text{حيث } (s) = (s + c) = c^2$$

$$s = c' \text{ حيث } (s) = c + c' \text{ حيث } (s) = c^2$$

$$\frac{s - c' \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) = c^2} = \frac{c^2 - c^2}{s \text{ حيث } (s) = c^2}$$

$$\frac{s \text{ حيث } (s) = c^2}{s \text{ حيث } (s) = c^2} = c'$$

(٢) جد $\frac{y^2}{x^2}$ لكل مما يأتي :

(ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 (د) $\sqrt{y} = x + 2$

أ) $(x^2 - 4)^2 = 4$
 ج) $x = 3y$

الحل

أ) $x^2 - 4 = 2$
 $x^2 - 4 = 2$
 $x^2 = 6$
 $x = \sqrt{6}$
 $y = \frac{x^2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
 $\frac{y^2}{x^2} = \frac{2^2}{(\sqrt{6})^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ب) $4x^2 + 3y^2 = 16$
 $8x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$
 $6y \frac{dy}{dx} = -8x$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{3y}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4(\sqrt{y})}{3y}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3\sqrt{y}}$
 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$



$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - \frac{2x-1}{y^3} = 0$$

$$(ب) \quad 1 + y - \frac{2x-1}{y^2} = 0$$

$$1 + y - \frac{2x-1}{y^2} = 0$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$2x-1 = y^2 + y^3$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$(y^2)$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$y^2$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$y^2$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$y^2$$

$$\frac{2x-1}{y^2} = 1 + y$$

$$(ج) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 = (x+1)^2 - 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d((x+1)^2 - 2x - 1)}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x + 1 - 2x - 1)}{dx} = \frac{d(x^2 - 4x)}{dx} = 2x - 4$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2) - d(2x)}{dx} = \frac{2x - 2}{dx} = 2x - 2$$

$$(د) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{حيث } y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = x^2 = (x+1)^2 - 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d((x+1)^2 - 2x - 1)}{dx} = 2(x+1) - 2 = 2x$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2 - 2x + 1 - 2x - 1)}{dx} = \frac{d(x^2 - 4x)}{dx} = 2x - 4$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x^2) - d(2x)}{dx} = \frac{2x - 2}{dx} = 2x - 2$$

٣) جد قيمة $\frac{y}{x}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

الحل

أ) $8x^2 + y^2 = \pi^2$ ؟
 $16x + 2y = 0$
 $8x = -y$

$8x^2 + y^2 = \pi^2$
 $8(-y)^2 + y^2 = \pi^2$
 $8y^2 + y^2 = \pi^2$
 $9y^2 = \pi^2$
 $y = \frac{\pi}{3}$

$8x = -y$
 $8x = -\frac{\pi}{3}$
 $x = -\frac{\pi}{24}$

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\pi}{3}}{-\frac{\pi}{24}} = -8$

عند $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$

$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$

ب) $2x^2 + y^2 = 2$ ، $(1, 1)$

$4x + 2y = 0$
 $2x = -y$

$2x^2 + y^2 = 2$
 $2(-y)^2 + y^2 = 2$
 $2y^2 + y^2 = 2$
 $3y^2 = 2$
 $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$2x = -y$
 $2x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}} = -2$

$0 = -2 \Rightarrow 0 = 0$

ج) $3 = \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$ ، $(1, 4)$

$3x = 2 + \frac{4x}{y}$
 $3xy = 2y + 4x$

$3xy - 4x = 2y$
 $x(3y - 4) = 2y$

$x = \frac{2y}{3y - 4}$

$\frac{y}{x} = \frac{y}{\frac{2y}{3y - 4}} = \frac{3y - 4}{2}$

$\frac{y}{x} = \frac{3(4) - 4}{2} = \frac{12 - 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$\frac{y}{x} = 4$

٤) إذا كان جا(س + ص) = ص^٢ جتا(س)، فجد ص'.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} \text{جبا}(س + ص) &= (ص + ١)ص' = ص' - ص - ص'جبا(س) + ص'ص'جا(س) \\ \text{جبا}(س + ص) + \text{جبا}(س) &= ص' - ص'جبا(س) \\ \text{جبا}(س + ص) - \text{جبا}(س) &= ص' - ص'جبا(س) \\ \text{ص}'(ص + ١) - \text{ص}'ص'جا(س) &= ص' - ص'جبا(س) \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{ص' - ص'جبا(س) - ص'جبا(س) + ص'ص'جا(س)}{ص'ص'جا(س) - ص'جبا(س)} = ص'$$

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقيًا.

الحل

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\begin{aligned} ٣ &= \sqrt{ص} + \sqrt{س} \\ ٠ &= \frac{١}{٢\sqrt{ص}} + \frac{١}{٢\sqrt{س}} \end{aligned}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{١}{٢\sqrt{ص}} = -\frac{١}{٢\sqrt{س}} \Rightarrow \frac{١}{\sqrt{ص}} = -\frac{١}{\sqrt{س}}$$

المماس أفقي $\Rightarrow ص' = ٠$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{١}{\sqrt{ص}} = -\frac{١}{\sqrt{س}} \Rightarrow \sqrt{ص} = -\sqrt{س}$$

$$\sqrt{ص} = ٣ - \sqrt{س} \Rightarrow ٣ = \sqrt{ص} + \sqrt{س}$$

$$\Rightarrow ٩ = ص + س \quad (٠.٦٩)$$

(٦) إذا كان $v = \sqrt{2s + 1}$ فجد $\frac{dv}{ds}$.

الحل

$$v^2 = 2s + 1 \Rightarrow 2v \frac{dv}{ds} = 2$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{2}{2v} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2s + 1}}$$

(٧) إذا كان $s = \cos v$ ، فأثبت أن $v = \arccos s$.

الحل

$$s = \cos v$$

$$1 = \cos v \times \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v} = \arccos s$$

نوعنا

$$v = \arccos \frac{1}{\cos v}$$

$$v = \arccos s$$

$$v = \arccos s \text{ وهو المطلوب.}$$

(٨) إذا كان $v = \arcsin s$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

الحل

$$v = \arcsin s \Rightarrow s = \sin v$$

$$s = \sin v \Rightarrow \frac{ds}{dv} = \cos v \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\text{عند } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dv}{ds} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{dv}{ds}$$

٩) إذا كان $s = \cos$ ، فأثبت أن: $s' = -2s + s^2 + s = 0$

الحل

$$s = \cos$$

$$-s' = \sin = -\cos^2$$

$$s' = \cos^2 - \sin^2 = \cos^2 - (1 - \cos^2) = 2\cos^2 - 1$$

$$s' = 2s^2 - 1$$

$$s' - 2s^2 + 1 = 0 \quad (\text{عند } s = \cos)$$

$$s' - 2s^2 + 1 = 0 \quad \text{وهو المطلوب}$$

١٠) إذا كان $v = 2n^2 + 3n$ ، $\frac{dv}{dn} = 4n$ ، فجد $\frac{dv}{ds}$ عند $n = 1$.

الحل

$$v = 2n^2 + 3n$$

$$\frac{dv}{dn} = 4n + 3 = 7 \quad \text{عند } n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dn} \times \frac{dn}{ds} = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{4} \times (4n + 3) = \frac{4n + 3}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4 \times 1 + 3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4n + 3}{4} = \frac{4 \times 1 + 3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{7}{4}$$

$$\text{عند } n = 1$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{7}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

(١١) إذا كان $s + v = \text{جاس}$ ، فأثبت أن:
(ص) $v^2 = \text{ظتا ص - قتا ص}$

الحل

$$s + v = \text{جاص}$$

$$1 + v' = \text{ص} \cdot \text{جبا ص} \cdot \text{ص} \quad (\text{تستعمل قاعدة مشتقة})$$

$$v' = \text{ص} \cdot \text{جبا ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاص} \cdot \text{ص}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{جبا ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاص} \cdot \text{ص}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{جبا ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاص} \cdot \text{ص}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{جبا ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاص} \cdot \text{ص}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \left(\frac{1}{\text{جاص}} - \frac{\text{جبا ص}}{\text{جاص}^2} \right) \cdot \text{ص}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \left(\frac{\text{جبا ص} - \text{قتا ص}}{\text{جاص}^2} \right) \quad \text{وهو المطلوب}$$

(١٢) إذا كان $s + v = \text{جاس}$ ، فأثبت أن:

$$\frac{v^2}{s-1} = \text{ص} + \text{ص}$$

الحل

$$s + v = \text{جاص}$$

$$s - \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$v' = \text{ص} \cdot \text{جبا ص} = \text{ص} \cdot (\text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص})$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} \quad (\text{تشتت})$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\text{ص} \cdot \text{ص} = \text{ص} \cdot \text{ص} + \text{ص} \cdot \text{ص} \cdot \text{ص} - \text{ص} \cdot \text{جاس}$$

$$\frac{c'}{s-1} = \frac{(c''+c')(s-1)}{s-1}$$

وهو المطلوب $\frac{c'}{s-1} = c''+c'$