

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds$

(ج) $\int (2s-3)(s^2-2s) ds$ (د) $\int \frac{s^3-9}{(s^2-2s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow ds = ds$ $\Rightarrow 1-2s = 1-2(v+2) = -4-2v$

$\int (-4-2v)v^4 dv = \int (-4v^4 - 2v^5) dv = -\frac{4v^5}{5} - \frac{2v^6}{6} + C = -\frac{4}{5}(s-2)^5 - \frac{1}{3}(s-2)^6 + C$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds = \int 6s^2 |2-s| ds$

ص = $2-s \Rightarrow ds = -ds$ $\Rightarrow 6s^2 = 6(2-v)^2 = 6(4-4v+v^2) = 24-24v+6v^2$

$\int (24-24v+6v^2)(-dv) = \int (-24+24v-6v^2) dv = -24v + 12v^2 - 2v^3 + C = -24(2-s) + 12(2-s)^2 - 2(2-s)^3 + C$

(ج) $\int (2s-3)(s^2-2s) ds = \int (2s^3-4s^2-3s^2+6s) ds = \int (2s^3-7s^2+6s) ds = \frac{2s^4}{4} - \frac{7s^3}{3} + \frac{6s^2}{2} + C = \frac{1}{2}s^4 - \frac{7}{3}s^3 + 3s^2 + C$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{2-3x} =$$

(ج) $\int (2-3x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2-3x}{-1/2} = -2(2-3x) = -4+6x$

ص = $2-3x = \frac{2-3x}{1} = \frac{2-3x}{1}$

$\cdot \frac{1}{1} = \frac{2-3x}{1}$

$\int \frac{2-3x}{2-3x} dx = \int 1 dx = x + C$

$\int -2(2-3x) dx = -4x + 9x^2 + C$

$\int -2(2-3x) dx = -4x + 9x^2 + C$

(د) $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

ص = $x^2-6 = \frac{x^2-6}{1} = \frac{x^2-6}{1}$

$\cdot \frac{1}{1} = \frac{x^2-6}{1}$

$= \frac{x^2-6}{x^2-6} \times \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2}$

$= \frac{x^2-6}{(x^2-6)^2} \times \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} = \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2}$

$p + \frac{1}{\sqrt{u}} = p + \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

$p + \frac{2}{\sqrt{u}} = p + \frac{2}{2-3x}$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+2s^4-s^5+s^6) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{5}s^5 - \frac{1}{6}s^6 + \frac{1}{7}s^7 + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int (1+s^4)^{1/2} ds$

ص = $1+s^4 = u \Rightarrow 4s^3 ds = du \Rightarrow ds = \frac{du}{4s^3}$

ص = $1+s^4 = u \Rightarrow 4s^3 ds = du \Rightarrow ds = \frac{du}{4s^3}$

$\int \frac{1}{2} \int (1+s^4)^{1/2} \frac{du}{4s^3} = \frac{1}{8} \int (1+s^4)^{1/2} du$

$\int \frac{1}{8} \int (1+s^4)^{1/2} du = \frac{1}{8} \int (1+s^4)^{1/2} du$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s + 1} ds$

ب) $\int \frac{3s^2(1-s)^2}{s^2} ds$

ج) $\int \frac{2s^2}{\sqrt{s^2 - 1}} ds$

د) $\int \frac{s^2 - 3}{(s^3 - 2s)^2} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s + 1} ds = \int \sqrt{4(s + \frac{1}{4})} ds$

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{4}}{4 \times \frac{1}{4}} ds = \int \frac{(1 + \frac{1}{4})}{4 \times \frac{1}{4}} ds$$

$$= \int \frac{\sqrt{4(s + \frac{1}{4})}}{4} ds$$

$$= \frac{1}{4} \left[\sqrt{4(s + \frac{1}{4})} - \frac{1}{3} \sqrt{4(s + \frac{1}{4})} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sqrt{4s + 1} - \frac{1}{3} \sqrt{4s + 1} \right)$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{1}{x} (1-2x) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 2x + \frac{1}{3}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1-x)^2 dx = \text{مساحة}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1-x^2 = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow x^2 = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow 1-x^2 = \frac{dx}{dx}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{dx}{dx} \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\frac{2}{3} \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right]_{-1}^1$$

$$\left(\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left(-1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} \cdot dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow x^3 - 6 = u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{(x^3 - 6)^2} dx - \int_1^2 \frac{2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{u} = \int_1^2 \frac{1}{1-u} = \int_1^2 \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx$

الحل

$$u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow x^3 - 6 = u$$

$$= \int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx = \int_2^3 \frac{3^x}{3^x - 2^x} dx - \int_2^3 \frac{2^x}{3^x - 2^x} dx$$

$$\int_2^3 \frac{3^x}{3^x - 2^x} dx = \int_2^3 \frac{3^x}{3^x - 2^x} dx$$

$$0 - 6 = (8 - 6) - (27 - 6) = (2 - 6) - (3 - 6) = 11 - 6 = 5$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

الحل

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = -١ \Rightarrow س٢ = ٥(-١) - ١ = -٦ \Rightarrow ٢ = ١ + (-٦)$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow س٢ = ٥(٢) - ١ = ٩ \Rightarrow ٥ = ١ + ٩$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس = ٣ - ٨٤ = ١٢$$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 (٩ + س٢) دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + س٢ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + س٢} دس = \int_0^2 \frac{٥س}{٢} دس$$

$$\int_0^2 \frac{٥س}{٢} دس = \int_0^2 \frac{٥(١ + س٢)}{٢} دس = \int_0^2 \frac{٥ + ٥س٢}{٢} دس = \frac{٥}{٢} \int_0^2 (١ + س٢) دس$$

$$= \frac{٥}{٢} \left[\sqrt{٩ + س٢} \right]_0^2$$

$$= \frac{٥}{٢} \left(\sqrt{٩ + ٤} - \sqrt{٩ + ٠} \right) = \frac{٥}{٢} (٥ - ٣) = \frac{٥}{٢} \times ٢ = ٥$$