

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{2-3s} ds$

(ج) $\int (2s-3s^2) \sqrt{2s-3} ds$ (د) $\int \frac{9-s^3}{(s^2-6s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 1 \Rightarrow ds = \frac{ds}{1} = ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2s) s^4 ds$

$= \int (1-2s) s^4 ds = \int (s^4 - 2s^5) ds = \frac{s^5}{5} - \frac{2s^6}{6} + C = \frac{s^5}{5} - \frac{s^6}{3} + C$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{2-3s} ds$

ص = $2-3s \Rightarrow \frac{ds}{ds} = -1 \Rightarrow ds = \frac{ds}{-1} = -ds$

$\int 6s^2 \sqrt{2-3s} ds = \int 6s^2 (-ds) = -\int 6s^2 ds = -2s^3 + C$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{u} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{u} =$$

(ج) $\int (2-3x)^{\frac{1}{2}} (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx$

$$u = 2-3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3$$

$$\therefore dx = \frac{du}{-3}$$

$$\int \frac{du}{-3} (2-3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int -\frac{1}{3} (2-3x)^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{1}{3} (2-3x)^{\frac{3}{2}}$$

(د) $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$u = x^2-6 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\therefore dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{9-x^2}{2x} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{9-x^2}{4x^2} du$$

$$p + \frac{u^{-1/2}}{-1/2} = p + \frac{u^{1/2}}{1/2}$$

$$p + \frac{u^{3/2}}{(3/2)} = p + \frac{2}{3} u^{3/2}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+2s^4-s^5+s^6) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{5}s^5 - \frac{1}{6}s^6 + \frac{1}{7}s^7 + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = \int 2(2-s)^{1/2} ds = -\frac{4}{3}(2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int 4s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{3} (1+s^4)^{3/2} d(1+s^4) = \frac{1}{6} \int (1+s^4)^{3/2} d(1+s^4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} (1+s^4)^{5/2} + C = \frac{1}{15} (1+s^4)^{5/2} + C$

(أ) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(ب) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(ج) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(د) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(أ) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(ب) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(ج) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(د) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(أ) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(ب) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب) $\int s^3(s^2-1) ds$

ج) $\int s^2 \sqrt{s^2-1} ds$

د) $\int \frac{s^2-3}{(s^3-2)s} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds = \int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds$

$$\int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{2} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{4s+1} ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{1}{x} (1 - 2x) = \frac{2}{3}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx = \text{مساحة}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1 - x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x^2} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{1 - x^2} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{1 - x^2} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \left(\frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_{-1}^1$$

$$\left(\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left(-1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(3 - u)^2} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(3 - u)^2} du$$

$$\int_1^2 \frac{1}{3 - u} = \int_1^2 \frac{1}{1 - u} = \int_1^2 \frac{1}{1 + u}$$

$$\frac{1}{1 - u} - \frac{1}{1 + u} = \frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1 - u)(1 + u)}$$

$$\frac{1}{1 - u} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right)$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx$

الحل

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_2^3 \frac{x^3 - 2}{(3 - u)^2} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{x^3 - 2}{(3 - u)^2} du$$

$$\int_2^3 \frac{1}{3 - u} = \int_2^3 \frac{1}{1 - u} = \int_2^3 \frac{1}{1 + u}$$

$$0 - 6 = (8 - 6) - (27 - 6) = (2 - 6) - (3 - 6)$$

$$11 =$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

الحل

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = ١ \Rightarrow س٢ = ٤ - ١ = ٣$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow س٢ = ٢٠ - ١ = ١٩$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_3^{19} ٤ ق(٥س - ١) دس = ٤ \int_3^{19} (٥س - ١) دس$$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^1 ٢س \sqrt{٩ + ٤س} دس$$

الحل

$$\int_0^1 ٢س \sqrt{٩ + ٤س} دس$$

$$\Leftrightarrow ٥س = ٩ + ٤س \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٤س} = \frac{٥}{٤}$$

$$\text{عند } س = ٠ \Rightarrow ٤س = ٩$$

$$\int_0^1 ٢س \sqrt{٩ + ٤س} دس = \int_3^5 \frac{١}{٢} \sqrt{٤س} دس = \frac{١}{٢} \int_3^5 \sqrt{٤س} دس$$

$$= \frac{١}{٢} \int_3^5 \sqrt{٤(٩ + ٤س)} دس$$

$$= \frac{١}{٢} \int_3^5 \sqrt{٤(٩ + ٤س)} دس$$

$$= \frac{١}{٢} \int_3^5 ٢ \sqrt{٩ + ٤س} دس = \int_3^5 \sqrt{٩ + ٤س} دس = \frac{١}{٢} (٢٧ - ١٥) = \frac{١٢}{٢} = ٦$$