إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١ - ٢س)(س - س^{٢})^{٤}\, ؤس$

ب) $\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}}\, ؤس$

جـ) $\int (٢س - ٣س^{٢})\, قا^{٢}(س^{٣} - س^{٢})\, ؤس$

د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}\, ؤس$

الحل

أ) $\int (١ - ٢ى)(س - س^{٢})^{٤}\, ؤس$.

$ص = س - س^{٢} \Leftarrow \frac{ؤص}{ؤى} = ١ - ٢ى \Leftarrow ؤى = \frac{ؤص}{١ - ٢ى}$

$\int (١ - ٢ى)\, ص^{٤}\, \frac{ؤص}{١ - ٢ى} = \int ص^{٤}\, ؤص$

$= \frac{ص^{٥}}{٥} + ج = \frac{(س - س^{٢})^{٥}}{٥} + ج$

ب) $\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢ى^{٣} - ٢)^{٢}}\, ؤس$

$ص = ٢ى^{٣} - ٢ \Leftarrow \frac{ؤص}{ؤى} = ٦ى^{٢} \Leftarrow ؤى = \frac{ؤص}{٦ى^{٢}}$

$\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{ص^{٢}}\, \frac{ؤص}{٦ى^{٢}} = \int ص^{\frac{٢}{٥}}\, ؤص$

$$\frac{ص^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + جـ = \frac{ص^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + جـ$$

$$= \frac{2}{7} ص^{\frac{7}{2}} + جـ$$

$$= \frac{2}{7} (2س^3 - 2)^{\frac{7}{2}} + جـ$$

ب) $\int (2س^2 - 2س^3)^{\frac{1}{2}} (س^3 - س^2)\, دس$

$ص = س^3 - س^2 \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 2س^2 - 2س$

$دص = (2س^2 - 2س)\, دس$

$\int (2س^2 - 2س^3)^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{2س^2 - 2س}$

$\int -ق^{\frac{1}{2}}ص \cdot دص = -ظاص + جـ$

$= -ظا(س^3 - س^2) + جـ$

د) $\int \frac{3س^2 - 9}{(س^3 - 6س)^2}\, دس$

$ص = س^3 - 6س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 3س^2 - 6$

$دص = (3س^2 - 6)\, دس$

$\int \frac{3س^2 - 9}{ص^2} \times \frac{دص}{3س^2 - 6}$

$\int \frac{3(س^2 - 3)}{ص^2} \times \frac{دص}{3(س^2 - 3)}$

$\int 3ص^{-2} \times دص$

$\frac{3}{2} \frac{ص^{-2+1}}{-2+1} + جـ = -\frac{3}{2} ص^{-1} + جـ$

$= -\frac{3}{2ص} + جـ = -\frac{3}{2(س^3 - 6س)} + جـ$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(3س-2)^2}\, ds$ ب) $\int (س-1)(2س^2-4س+1)^5\, ds$

جـ) $\int 2 قا^2(2-س)\, ds$ د) $\int 2س^3 جا(س^4+1)\, ds$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(3س-2)^2}\, ds = \int (3س-2)^{\frac{2}{3}}\, ds = \frac{(3س-2)^{\frac{2}{3}+1}}{3 \times (\frac{2}{3}+1)} + جـ$

$= \frac{(3س-2)^{\frac{5}{3}}}{3 \times \frac{5}{3}} + جـ = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(3س-2)^5} + جـ$

ب) $\int (س-1)(2س^4-4س+1)^5\, ds$

$ص = 2س^4-4س+1 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 4س^3-4$

$ds = \frac{ds}{4س^3-4} \Leftarrow ds = \frac{ds}{4(س-1)}$

$\int (س-1) ص^5 \times \frac{ds}{4(س-1)} = \frac{1}{4}\int ص^5\, ds$

$= \frac{ص^6}{4 \times 6} + جـ = \frac{(2س^4-4س+1)^6}{24} + جـ$

جـ) $\int 2 قا^2(2-س)\, ds =$

$2 \times \frac{ظا(2-س)}{-1} + جـ$

$-2 ظا(2-س) + جـ$

د) $\int 2س^3 جا(س^4+1)\, ds$

$ص = س^4+1 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 4س^3 \Leftarrow$

$ds = \frac{ds}{4س^3}$

$\int 2س^3 جا ص \frac{ds}{4س^3} =$

$\int \frac{1}{2} جا ص\, ds = -\frac{1}{2} جتا ص + جـ$

$= -\frac{1}{2} جتا(س^4+1) + جـ$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{2} \sqrt{٤س + ١}\ د س$

ب) $\int_{-١}^{١-} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣}\ د س$

جـ) $\int_{١}^{٢} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\ د س$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\ د س$

الحل

٤) $\int_{0}^{2} \sqrt{٤س + ١}\ د س = \int_{0}^{2} (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\ د س$

$= \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢} + ١}}{٤ \times (\frac{١}{٢} + ١)} \right]_{0}^{2} = \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} \right]_{0}^{2}$

$= \left[\frac{\sqrt{(٤س + ١)^{٣}}}{٦} \right]_{0}^{2}$

$= \frac{١}{٦} \left[\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right]$

$= \frac{١}{٦} (\sqrt{٩^{٣}} - \sqrt{١^{٣}})$

$\frac{1}{6}(27-1)$

$\frac{1}{6} \times 26 = \frac{13}{3}$

ب) $\int_{-1}^{1} 3x^2 (x^3-1)^3 \, dx =$ صفر

جـ) $\int_{1}^{0} 2x \sqrt{x^4-1} \, dx =$

$\int_{1}^{0} 2x (x^4-1)^{\frac{1}{2}} \, dx$

$u = x^4 - 1 \Leftarrow \frac{du}{dx} = 4x \Leftarrow dx = \frac{du}{4x}$

$\int_{1}^{0} 2x \, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{4x} = \int_{1}^{0} u^{\frac{1}{2}} du$

$\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{0} = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_{1}^{0}$

$\frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x^4-1)^4} \right]_{1}^{0} = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{(0^4-1)^4} - \sqrt[3]{(1-1)^4} \right)$

$$\frac{3}{4}\left(\sqrt{16}^{3}-\sqrt{0}^{3}\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(16-0\right)$$

$$\frac{3}{4}\times 16=12$$

د) $\int_{1}^{2}\frac{3-2س}{(ص-3س)^{2}}\,دس=\int_{1}^{2}(3-2ع)(ص-3ع)^{-2}\,.\,دع$

$ص=ص-3ع \Leftarrow \frac{دص}{دع}=ص-3 \Leftarrow دع=\frac{دص}{ص-3}$

$\int_{1}^{2}(3-2ع)\,ص^{-2}\,\frac{دص}{ص-3}=\int_{1}^{2}ص^{-2}\,دص$

$=\left[\frac{ص^{-2+1}}{-2+1}\right]_{1}^{2}=\left[\frac{ص^{-1}}{-1}\right]_{1}^{2}=\left[\frac{1}{ص}\right]_{1}^{2}$

$=\left[\frac{1}{ص-3ع}\right]_{1}^{2}=\frac{1}{ص-3ع}-\frac{1}{ص-3ع}=\frac{1}{1-3\times 2}-\frac{1}{2-3\times 2}$

$=\frac{1}{-5}+\frac{1}{4}=$ ص ه ر

---

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-2}^{3}3س^{2}\,ق'(س^{3})\,دس$

الحل

$ص=س^{3} \Leftarrow \frac{دص}{دس}=3س^{2} \Leftarrow دس=\frac{دص}{3س^{2}}$

$\int_{-2}^{3}3س^{2}\,ق'(ص)\,\frac{دص}{3س^{2}}=\int_{-2}^{3}ق'(ص)\,دص$

$=\left[ق(ص)\right]_{-2}^{3}=ق(س^{3})\Big]_{-2}^{3}$

$ق(3^{3})-ق((-2)^{3})=ق(27)-ق(-8)=-6-5$

$=-11$

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢} ق(س)\,ح س = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢}+١)\,ح س$

الحل

$ص = س^{٢}+١ \Leftarrow \frac{ح ص}{ح س} = ٢س \Leftarrow ح ص = ٢س\, ح س$

$\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(ص)\,ح ص = \int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\,ح ص$

عندما $س = -١ \leftarrow ص = (-١)^{٢}+١ = ٢$

عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٢^{٢}+١ = ٥$

$\int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\,ح ص = ٤ق(ص) = ٤ \times ٣ - ٤ = ١٢-$

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤} ٢س\sqrt{س^{٢}+٩}\,ح س$

الحل

$\int_{٠}^{٤} ٢س(س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,ح س$

$ص = س^{٢}+٩ \Leftarrow \frac{ح ص}{ح س} = ٢س \Leftarrow ح ص = ٢س\, ح س$

$\frac{ح ص}{ح س} = ٠$

$\int_{٠}^{٤} ٢س \cdot ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ح ص}{ح س} = \int_{٠}^{٤} ص^{\frac{١}{٢}}\, ح ص = \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\right]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}$

$\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}}\right)$

$\frac{٢}{٣}(٥^{٣} - ٣^{٣}) = \frac{٢}{٣}(١٢٥ - ٢٧)$

$= \frac{٢}{٣} \times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$