

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$3s^2 + 4s = \frac{ds}{du}$$

$$ds = \frac{ds}{du} \cdot du$$

$$\int (2s^3 + 4s^2) ds = \int (2u^3 + 4u^2) \frac{ds}{du} du$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2} u^4 + \frac{4}{3} u^3 + C$$

**تدريب ٢**

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

**الحل**

$$0 = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{dx}{5}$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1 \quad 16 = 1 + 3 \times 5 = u$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0 \quad 1 = 1 + 0 \times 5 = u$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{5} du$$

$$= \frac{1}{5} \int_1^3 \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{5} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{5} \ln 3$$

**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds \quad (2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (1-s^2)\sqrt{s^2-2s-1} ds \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds$$

**الحل**

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3s^2 u^{-5} \cdot \frac{du}{2s} \\ &= \int \frac{3}{2} s u^{-5} du \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{u^{-5}}{u} du = \frac{3}{2} \int u^{-6} du$$

$$= \frac{3}{2} \left( \frac{u^{-5}}{-5} \right) + C = -\frac{3}{10} \frac{1}{(1+s^2)^5} + C$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

$= u + \ln|u| + C$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

$= \int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{u + 1}{u} du = \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln|u| + C$

$= x^2 - 1 + \ln|x^2 - 1| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{(\theta+1)أ} + ج$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جنا(أس + ب)}{أ} + ج$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس = \frac{(أس + ب)^{1-\theta}}{(1-\theta)أ} + ج$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس + ب)^\theta} دس = \frac{جنا(أس + ب)^{1-\theta}}{(1-\theta)أ} + ج$$