

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s = 2u^3 + 4u$$

$$\int (2u^3 + 4u) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + 2u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(2s^2 + 4s) + C$$

**تدريب ٢**

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

**الحل**

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1 \quad \text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_0^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} du$$

$$= \int_0^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5u} du = \int_0^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5(1+\sqrt{5x})} du$$

$$\frac{2}{5} = 3 - x \cdot \frac{2}{5} = (3-x) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{16}{5} - \frac{2x}{5}\right) \frac{2}{5}$$

**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2 - 1} ds$$

$$(3) \int (4s - 1) \sqrt{s^2 - 2s - 1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

**الحل**

$$(1) \int 3s^2(s^2 + 1)^{-5} ds$$

$$= \int 3u^{-5} \cdot \frac{2s}{2} ds$$

$$= \int \frac{3}{2} u^{-5} du$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{u^{-4}}{-4} + C$$

$$= -\frac{3}{8} \frac{1}{(s^2 + 1)^4} + C$$

$$\begin{cases} u = s^2 + 1 \\ \frac{du}{ds} = 2s \\ ds = \frac{du}{2s} \end{cases}$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \left( \frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \left( 1 + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \frac{1}{1-x^2} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx$

$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \ln|1-x| - \frac{1}{2} \ln|1+x| \right] + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{أ(\theta+1)}$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{سبنا(أس + ب)}{أ}$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس^2 - 1) دس$$

$$(2) \int (أس^4 - 1) دس$$

الحل

$$(1) \int (أس^2 - 1) دس = \frac{أس^3}{3} - س$$

$$(2) \int (أس^4 - 1) دس = \frac{أس^5}{5} - س$$

$$سبنا(أس^4 - 1)$$