إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int ٢١\,(٣\text{س}^٢ + ٤\text{س})\,(\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢)^٧\,\text{ءس}$

الحل

نفرض أن $\text{ص} = \text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^٢ + ٤\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^٢ + ٤\text{س}} = \text{دس}$

$\int ٢١\,\cancel{(٣\text{س}^٢ + ٤\text{س})}\,\text{ص}^٧ \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{٣\text{س}^٢ + ٤\text{س}}} =$

$\int ٢١\,\text{ص}^٧ \cdot \text{دص} = \frac{٢١\,\text{ص}^٨}{٨} + \text{جـ}$

$\frac{٢١}{٨}\,(\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢)^٨ + \text{جـ}$

تدريب ٢

حُلَّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.

جد قيمة التكامل الآتي:

٤) $\int_{٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٥\text{س} + ١}} \, \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = ٥\text{س} + ١ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{٥} = \text{دس} .$

عندما $\text{س} = ٣ \leftarrow \text{ص} = ٥ \times ٣ + ١ = ١٦$

عندما $\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٥ \times ٠ + ١ = ١$

$\int_{١٦}^{١} \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{دص}}{٥} = \frac{١}{٥} \int_{١٦}^{١} \text{ص}^{-\frac{١}{٢}} \, \text{دص}$

$\frac{١}{٥} \left[\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{١٦}^{١} = \frac{٢}{٥} \left[\sqrt{\text{ص}} \right]_{١٦}^{١}$

$\frac{٢}{٥} \left(\sqrt{١} - \sqrt{١٦} \right) = \frac{٢}{٥} (١ - ٤) = \frac{٢}{٥} \times -٣ = \frac{-٦}{٥}$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int ٣\text{س}(\text{س}^{٢} + ١)^{-٥} \, \text{ءس}$

٢) $\int ٢\text{س}\,\text{قا}^{٢}(١ - \text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

٣) $\int_{١}^{-١} (٤\text{س} - ١)\sqrt[٣]{\text{س} - ٢\text{س}^{٢} - ١} \, \text{ءس}$

٤) $\int_{٠}^{٣} \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س} + ١}} \, \text{ءس}$

الحل

١) $\int ٣\text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{-٥} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢}+١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\int ٣\text{س}\,\text{ص}^{-٥} \, \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\frac{٣}{٢}\int \text{ص}^{-٥}\,\text{دص} =$

$\frac{٣}{٢}\,\frac{\text{ص}^{-٥+١}}{-٥+١} + \text{ج} = \frac{٣}{٢}\,\frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{ج}$

$= -\frac{٣}{٨} \times \frac{١}{\text{ص}^{٤}} + \text{ج} = \frac{-٣}{٨(\text{س}^{٢}+١)^{٤}} + \text{ج}$

٢) $\int ٢س\ قا^{٢}(١-س^{٢})\ دس$

$ص = ١ - س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = -٢س$

$دس = \frac{دص}{-٢س}$

$\int \cancel{٢س}\ قا^{٢}ص \cdot \frac{دص}{\cancel{-٢س}}$

$\int -قا^{٢}ص \cdot دص$

$-ظا\ ص + ج$

$-ظا(١-س^{٢}) + ج$

٣) $\int_{١}^{-١} (٤س-١)\sqrt[٣]{س-٢س^{٢}-١}\ دس$

$ص = س - ٢س^{٢} - ١$

$\frac{دص}{دس} = ١ - ٤س$

$دس = \frac{دص}{١-٤س}$

$\int_{١}^{-١} (٤س-١)\sqrt[٣]{س-٢س^{٢}-١}\ دس = \int_{١}^{-١} (٤س-١)\sqrt[٣]{س-٢س^{٢}-١}\ دس =$

$\int_{١}^{-١} \cancel{(٤س-١)}\ ص^{\frac{١}{٣}} \frac{دص}{\cancel{١-٤س}} = -\int_{١}^{-١} ص^{\frac{١}{٣}}\ دص = -\left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right]_{١}^{-١}$

$-\frac{٣}{٤}\left[\sqrt[٣]{(س-٢س^{٢}-١)^{٤}}\right]_{١}^{-١} = -\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{(-١-٢-١)^{٤}} - \sqrt[٣]{(١-٢-١)^{٤}}\right) =$

$-\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{٢٥٦} - \sqrt[٣]{١٦}\right).$

٤) $\int_{٠}^{٣} \frac{١}{\sqrt[٥]{س+١}}\ دس =$

$\int_{٠}^{٣} \frac{١}{(س+١)^{\frac{١}{٥}}}\ دس = \int_{٠}^{٣} (س+١)^{-\frac{١}{٥}}\ دس$

$= \left[\frac{(س+١)^{\frac{٤}{٥}}}{\frac{٤}{٥}}\right]_{٠}^{٣}$

$= \frac{٥}{٤}\left[\sqrt[٥]{(س+١)^{٤}}\right]_{٠}^{٣}$

$= \frac{٥}{٤}\left(\sqrt[٥]{٢٥٦} - \sqrt[٥]{١}\right) = \frac{٥}{٤}\left(\sqrt[٥]{٢٥٦} - ١\right)\ \frac{١}{٣}$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ءس}$ ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq$ ٠، ن $\neq$ −١

٢) $\int \text{جتا}(\text{أس} + \text{ب}) \, \text{ءس}$ ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq$ ٠

الحل

١) $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ءس} = \dfrac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1) \times \text{أ}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جتا}(\text{أس} + \text{ب}) \, \text{ءس} = \dfrac{\text{جا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int_{-1}^{2} ٦(١ - ٢\text{س})^{٥} \, \text{ءس}$ ٢) $\int ١٢ \, \text{جا}(١ - ٤\text{س}) \, \text{ءس}$

الحل

١) $\left[\dfrac{\cancel{6}(1 - 2\text{س})^{6}}{\cancel{6} \times -2} \right]_{-1}^{2} = \dfrac{(1 - 2 \times 2)^{6}}{-2} - \dfrac{(1 - 2 \times -1)^{6}}{-2} = \dfrac{(-3)^{6} - (3)^{6}}{-2} = \text{صفر}$

٢) $\int 12 \, \text{جا}(1 - 4\text{س}) \, \text{ءس} = \dfrac{-12}{-4} \, \text{جتا}(1 - 4\text{س}) + \text{جـ}$

$3 \, \text{جتا}(1 - 4\text{س}) + \text{جـ}$