

## إجابات تدريبات الدرس

### التكامل بالتعويض

#### تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي:  $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

#### الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s^2 = 2u^3 + 4u^2$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + \frac{4}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2}(s^4 + 4s^3) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_6^{16} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \ln|u| \right]_6^{16}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\ln 16 - \ln 6) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left( \frac{16}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left( \frac{8}{3} \right)$$

**تدريب ٣**

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds \quad (2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

**الحل**

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} \sin &= 1+s^2 \\ \cos &= 2s \\ \frac{ds}{\cos} &= ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3 \cos^{-5} \cdot \frac{\cos}{2} ds \\ &= \int \frac{3}{2} \cos^{-4} ds \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \int \cos^{-4} ds = \frac{3}{2} \int \frac{\cos^2}{\cos^6} ds = \frac{3}{2} \int \frac{1-\sin^2}{\cos^6} ds$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1-\sin^2}{\cos^6} ds = \frac{3}{2} \int \frac{1-\sin^2}{\cos^4} ds = \frac{3}{2} \int \frac{1-\sin^2}{\cos^2} ds$$

(٤)  $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

(٣)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{1} \sqrt{u} \right] = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$

(٤)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \int \frac{1}{1+u} du = \ln|1+u| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{(\theta+1)أ} + ج$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جنا(أس + ب)}{أ} + ج$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1)دس} دس \quad (2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1)دس} دس$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1)دس} دس = \int \frac{1}{(أس - 1)(أس + 1)دس} دس = \frac{1}{2} \left[ \int \frac{1}{أس - 1} دس - \int \frac{1}{أس + 1} دس \right] = \frac{1}{2} \left[ \ln|أس - 1| - \ln|أس + 1| \right] + ج$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1)دس} دس = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(أس^2 - 1)دس} دس = \frac{1}{4} \left[ \ln|أس^2 - 1| - \ln|أس^2 + 1| \right] + ج$$