

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$3s^2 + 4s = \frac{ds}{du}$$

$$ds = \frac{ds}{du} \cdot du$$

$$\int (2s^3 + 4s^2) ds = \int (2u^3 + 4u^2) \frac{ds}{du} du$$

$$\int (2u^3 + 4u^2) du = \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2} u^4 + \frac{4}{3} u^3 + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{5x}{5} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = 0$$

$$\cdot \sqrt{5x} = -1$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 3 \leftarrow 1 + 3 \times 5 = 16$$

$$\text{عندما } \sqrt{5x} = 1 \leftarrow 1 + 1 \times 5 = 6$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_6^{16} \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\ln|u| \right]_6^{16}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\ln 16 - \ln 6) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(\frac{16}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} u &= 1+s^2 \\ du &= 2s ds \\ ds &= \frac{du}{2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3s^2 u^{-5} \cdot \frac{du}{2s} \\ &= \int \frac{3}{2} s u^{-5} du \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{u^{-5}}{u} du = \frac{3}{2} \int u^{-6} du$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{u^{-5}}{-5} \right) + C = -\frac{3}{10} \frac{1}{(1+s^2)^5} + C$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \frac{u}{u} + \frac{1}{u} du$

$= \int 1 + \frac{1}{u} du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u}}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}} du$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\theta دس = \frac{(أس + ب)^{\theta+1}}{(\theta+1)أ} + ج$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{جنا(أس + ب)}{أ} + ج$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1)س} دس$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1)س} دس$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس^2 - 1)س} دس = \int \frac{1}{(أس - 1)(أس + 1)س} دس = \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{أس - 1} دس - \int \frac{1}{أس + 1} دس \right] + ج$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس^4 - 1)س} دس = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(أس^2 - 1)(أس^2 + 1)س} دس = \frac{1}{8} \left[\int \frac{1}{أس^2 - 1} دس - \int \frac{1}{أس^2 + 1} دس \right] + ج$$