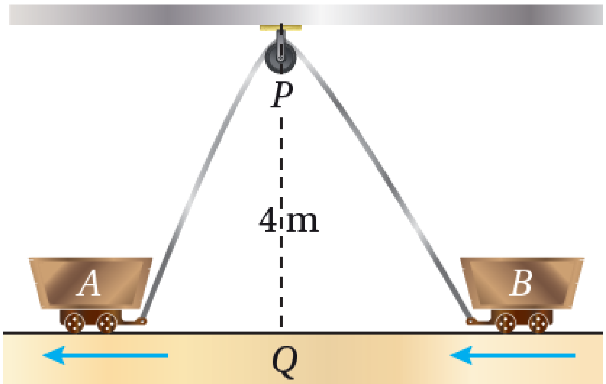
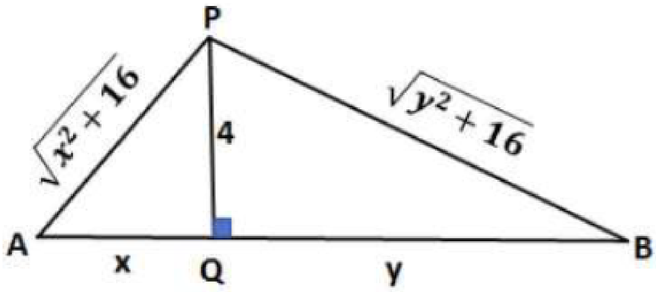
مهارات التفكير العليا

المعدلات المرتبطة



(28) تبرير: رُبطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m ، وهو يمر بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4 m ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة 0.5 m/s ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعد 3 m من النقطة Q ، مبرراً إجابتي.

لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى:

dxdt=0.5m/s

المطلوب:

dydt|x=3

طول الحبل:

AP+BP=x2+16+y2+16=12

عندما $x = 3$ فإن:

9+16+y2+16=12→y2+16=7→y=33x2+16+y2+16=12xdxdtx2+16+ydydty2+16=0dydt=−xy2+16yx2+16dtdtdydt|x=3=−333+163325×0.

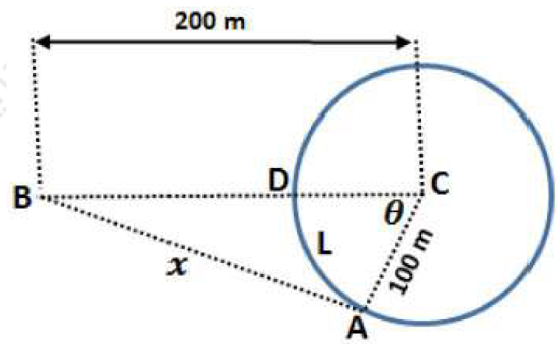
5=−211033m/s

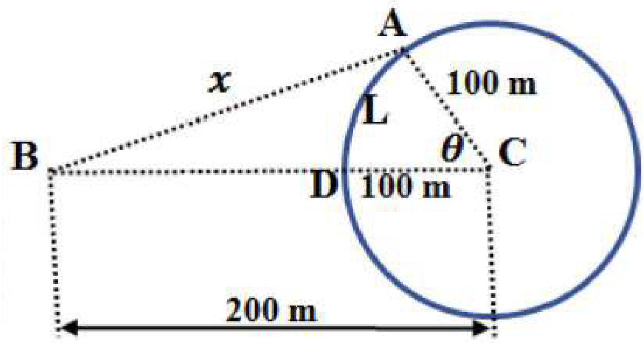
Bإذن، تقترب العربة من النقطة Q بسرعة مقدارها 211033m/s

(29) تبرير: يركض عداء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100 m ، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s ، ويقف عداء آخر على بعد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما 200 m .

تنبيه: أجد جميع الحلول الممكنة.

Aليكن العداء الأول والعداء الثاني B والبعد بينهما x كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD . توجد حالتان لموقع العداء A كما في الرسم الآتي:





الحالة الأولى: العداء A إلى يمين B

Lالمعطى: (لتكن متناقصة)، ويكون:

dLdt=−7m/s

المطلوب:

dxdt|x=200m

L=rθ=100θ→dLdt=100dθdt→dθdt=−0.07rad/sx2=(200)2+(100)2−2(200)(100)cosθx2=50000−40000cosθ2xdxdt=40000sinθdθdtdxdt=20000sinθxdθdtcosθ=50000−x240000

xعندما = 200 فإن:

cosθ=50000−4000040000=14

ومنه:

sinθ=154dxdt|x=200=20000154200×−0.07=−7154m/s

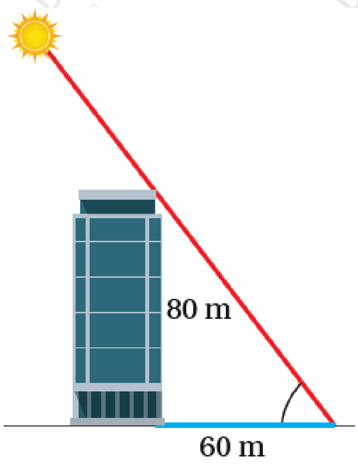
الحالة الثانية: العداء A إلى يسار B

Lعندئذ يتزايد طول القوس ، ويكون dLdt=7، ويكون dθdt=0.07rad/s ، وعليه فإن:

dxdt|x=200=20000154200×0.07=7154m/s

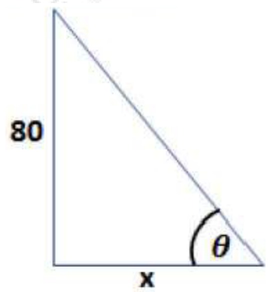
m إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها 7154m/s

(30) تحدّ: سطعت الشمس في أحد الأيام فوق مبنى ارتفاعه 80 m ، فكان طول ظلّ المبنى في هذه اللحظة 60 m كما في الشكل المجاور. أجد معدل تغير طول ظل المبنى في هذه اللحظة بوحدة cm/min ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة، علماً بأنّ الشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً.



إرشاد: تُكمل الأرض دورة كاملة حول نفسها كل 24 ساعة.

xليكن طول ظل المبنى ، وزاوية ارتفاع الشمس θ .



θالشمس في هذا اليوم ستمر فوق المبنى تماماً، يعني أن الزاوية متزايدة.

المعطى:

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\pi\,rad}{24h}=\frac{\pi}{12}\frac{rad}{h}=\frac{\pi\,rad}{12\times 60\,min}=\frac{\pi}{720}\,rad/min$$

المطلوب:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}$$

العلاقة التي تربط المتغيرين هي:

$$\tan\theta=\frac{80}{x}$$
$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{80}{x^2}\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x^2\sec^2\theta}{80}\times\frac{d\theta}{dt}$$

عندما $x = 60$ فإن: طول وتر المثلث القائم في الشكل أعلاه يساوي:
$100=\sqrt{80^2+60^2}$

ومنه: $\sec\theta=\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$

إذن:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}=-\frac{60^2\left(\frac{25}{9}\right)}{80}\times\frac{\pi}{720}=-\frac{25\pi}{144}\,m/min$$

لتحويل الوحدة إلى cm/min نضرب السرعة في 100 ، فتكون:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=60}=-\frac{2500\pi}{144}\,cm/min$$

إذن يتناقص طول ظل البناية في تلك اللحظة بسرعة مقدارها 54.5 cm/min تقريباً.