أتدرب وأحل المسائل

قاعدة السلسلة الأسئلة (25 - 41)

بكتيريا: يمثل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

(25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

A(t)=Ne0.1tA′(t)=0.1Ne0.1tA′(3)=0.1Ne0.3

(26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعات هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N .

A′(k)=0.1Ne0.1k0.2=0.1Ne0.1ke0.1k=0.20.1N=2N0.1k=ln2N→k=10 ln2N

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلّ ممّا يأتي:

(27) f(x)=sinπx, f′′′(x)

f(x)=sinπxf′(x)=πcosπxf′′(x)=−π2sinπxf′′′(x)=−π3cosπx

(28) f(x)=cos(2x+1), f(5)(x)

f(x)=cos(2x+1)f′(x)=−2sin(2x+1)f′′(x)=−4cos(2x+1)f′′′(x)=8sin(2x+1)f(4)(x)=16cos(2x+1)f(5)(x)=−32sin(2x+1)

(29) f(x)=cosx2,f′′(x)

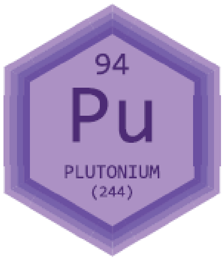
f(x)=cos x2f′(x)=−2xsin x2f′′(x)=(−2x)(2xcos x2)+(sin x2)(−2)=−4x2cos x2−2sin x2

(30) إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة (0,1).

$y=esinxdydx=esinxcos\ x$

ميل المماس هو:

$m=dydx|x=0=esin0cos0=1$



(31) مواد مشعّة: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران: A(t)=20(12)t/140 . أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عند $t = 2$.

$A(t)=20(12)t140A'(t)=20140(ln12)(12)t140A'(2)=20140(ln12)(12)2140≈−0.098$

g إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098 كلّ يوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويحدد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات.

(32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

s(t)=0.1sin2.4tv(t)=2.4×0.1cos2.4t=0.24cos2.4tv(1)=0.24cos2.4≈−0.177cm/s

(33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً.

v(t)=0→0.24cos2.4t=0→cos2.4t=0

وهذا يعني أنّ:

$|\sin 2.4t|=1$

أي أنّ:

$\sin 2.4t=1, \text{ or } -1$

لكن موقع الكرة هو:

$s(t)=0.1\sin 2.4t$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو:

$s=0.1(1)=0.1$ or $,s=0.1(-1)=-0.1$

cm إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفراً يكون موقعها عند 0.1 أو 0.1- cm

(34) أجد موقع الكرة عندما تكون تسارعها صفراً.

$a(t)=-0.24\times 2.4\sin 2.4t=-0.576\sin 2.4t \quad a(t)=0\rightarrow \sin 2.4t=0$

لكن موقع الكرة هو:

$s(t)=0.1\sin 2.4t$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s=0.1(0)=0$

إذن، عندما تكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s=0$ ، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة:

(35) $x=t+2\ ,\ y=t^2-1\ ,\ t=1$

$\frac{dy}{dt}=2t,\ \frac{dx}{dt}=1 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$

ميل المماس:

$m=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=2\times 1=2$

نقطة التماس:

$x=1+2=3,\ y=(1)^2-1=0$

معادلة المماس:

$y-0=2(x-3)\rightarrow y=2x-6$

(36) $x=t2, y=t2-4, t=-1$

$dydt=2t,dxdt=12dydx=dydtdxdt=2t12=4t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=-1=4\times-1=-4$

نقطة التماس:

$x=-12, y=(-1)2-4=-3$

معادلة المماس:

$y+3=-4(x+12)\rightarrow y=-4x-5$

(37) $x=t-\sin t, y=1-\cos t, t=\pi3$

$dydt=\sin t,dxdt=1-\cos tdydx=dydtdxdt=\sin t1-\cos t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=\pi3=\sin \pi31-\cos \pi3=321-12=3$

نقطة التماس:

$x=\pi3-32, y=1-12=12$

معادلة المماس:

$y-12=3(x-\pi3+32)\rightarrow y=3x-3\pi3+2$

(38) $x=\sec2 t-1, y=\tan t, t=-\pi4$

$dydt=\sec2 t,dxdt=2\times\sec t\times\sec t \tan t=2\sec2 t \tan tdydx=dydtdxdt=\sec2 t2\sec2 t \tan t=12\cot t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=-\pi4=12\cot (-\pi4)=-12$

نقطة التماس:

$x=sec2\ (−π4)−1=1,\ y=tan\ (−π4)=−1$

معادلة المماس:

$y+1=−12(x−1)→y=−12x−12$

(39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: x=2(t−sin t), y=2(1−cos t) ،
حيث: 0≤t≤2π . أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما t=π4 هما: 2−1 ،2+1−2g·1 على الترتيب.

$dydt=2sin\ t,dxdt=2(1−cos\ t)dydx=dydtdxdt=2sin\ t2(1−cos\ t)=sin\ t1−cos\ t$

ميل المماس:

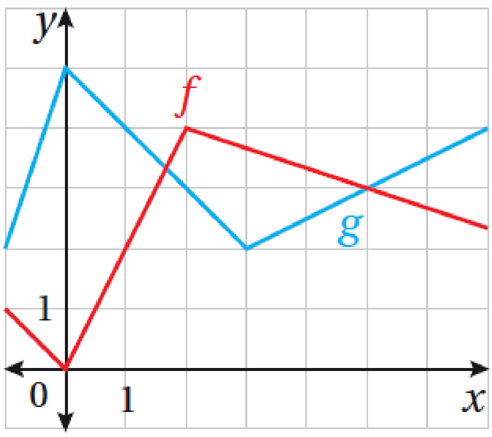
$m=dydx|t=π4=sin\ π41−cos\ π4=121−12=12−1×2+12+1=2+1$

ميل العمودي على المماس:

$m=−12+1×2−12−1=1−2$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:

$h(x) = f(g(x))$ ، وكان: $p(x) = g(f(x))$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



(40) $h'(1)$

$h'(1)=f'(g(1))\times g'(1)=f'(4)\times g'(1)$

$g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي 1-

$f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (5, 3) و (2, 4) ويساوي 13-

$h'(1)=-13\times -1=13$

(41) $p'(1)$

$p'(1)=g'(f(1))\times f'(1)=g'(2)\times f'(1)$

$g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي 1-

$f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0, 0) و (2, 4) ويساوي 2

$p'(1)=-1\times 2=-2$