أتدرب وأحل المسائل

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(xx2+4dx (1∫

xx2+4dxu=x2+4⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫xx2+4dx=∫xu×du2x=∫12u∫du=∫12u−12du=u12+C=x2+4+C

(x2(2x3+5)4dx (2∫

x2(2x3+5)4dxu=2x3+5⇒dudx=6x2⇒dx=du6x2∫x2(2x3+5)4dx=∫x∫2u4×du6x2=∫16u4du=130u5+C=130(2x3+5)5+C

(3xx2+7dx (3∫

3xx2+7dxu=x2+7⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫3xx2+7dx=∫3xu×du2x=∫∫32u12du=u32+C=(x2+7)3+C

(x6e1−x7dx (4∫

x6e1−x7dxu=1−x7⇒dudx=−7x6⇒dx=du−7x6∫x6e1−x7dx=∫x6eu∫×du−7x6=∫−17eudu=−17eu+C=−17e1−x7+C

(x4(x5+9)3dx (5∫

x4(x5+9)3dxu=x5+9⇒dudx=5x4⇒dx=du5x4∫x4(x5+9)3dx=∫x4u3∫×du5x4=∫15u−3du=−110u−2+C=−110(x5+9)2+C

(3x2−1)ex3−xdx (6)∫

3x2−1)ex3−xdxu=x3−x⇒dudx=3x2−1⇒dx=du3x2−1∫(3x2−1)ex)∫3−xdx=∫(3x2−1)eudu3x2−1=∫eudu=eu+C=ex3−x+C

(3x−3x2−2x+4dx (7∫

bbb∫3x−3x2−2x+4dxu=x2−2x+4⇒dudx=2x−2⇒dx=du2x−2∫3x−3 x2−2x+4dx=∫3x−3u×du2x−2=∫3(x−1)u×du2(x−1)=∫32u−12du=3u12+C=3x2−2x+4+C

(xdx (81xln∫

|xdx=∫1xu×xdu=∫1udu=lnx⇒dudx=1x⇒dx=xdu∫1xlnxdxu=ln1xln∫x|+C|lnu|+C=ln

(x)4dx (9x(1+cossin∫

x(1+cosx∫sinx⇒dx=du−sinx⇒dudx=−sinx)4dxu=1+cosx(1+cossin∫x)5+Cx=∫−u4du=−15u5+C=−15(1+cosxu4×du−sinx)4dx=∫sin

(2xdx (102xcossin5∫

2xc2x∫sin52x⇒dx=du2cos2x⇒dudx=2cos2xdxu=sin2xcosbbb∫sin52x)6+C2x=∫12u5du=112u6+C=112(sin2x×du2cos2xdx=∫u5cosos

((1x)x2dx (11sin∫

(u)x2(1x)x2dx=∫sin(1x)x2dxu=1x⇒dudx=−1x2⇒dx=−x2du∫sinsin∫(1x)+Cu+C=cosudu=cos×−x2du=∫−sin

(xdx (12xesincos∫

xexdx=∫cosxesinx∫cosx⇒dx=ducosx⇒dudx=cosxdxu=sinxesincos∫x+Cx+C=−1esinx=∫1eudu=∫e−udu=−e−u+C=−e−sinu×ducos

(ex(2+ex)5dx (13∫

ex(2+ex)5dxu=2+ex⇒dudx=ex⇒dx=duex∫ex(2+ex)5dx=∫exu5×d∫uex=∫u5du=16u6+C=16(2+ex)6+C

(x)xdx (14(lncos∫

(u)x××xdu=x)xdx=∫cos(lnx⇒dudx=1x⇒dx=xdu∫cosx)xdxu=ln(lncos∫x)+C(lnu+C=sinudu=sin∫cos

(3x2−2x−1)(x3−x2−x)4dx (15)∫

3x2−2x−1)(x3−x2−x)4dxu=x3−x2−x⇒dudx=3x2−2x−1⇒dx=du)∫
3x2−2x−1∫(3x2−2x−1)(x3−x2−x)4dx=∫(3x2−2x−1)u4×du3x2−2x
−1=∫u4du=15u5+C=15(x3−x2−x)5+C

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(2x−1)ex2−xdx (16)02∫

2x−1)ex2−xdxu=x2−x⇒dudx=2x−1⇒dx=du2x−1x=2⟹u=(2))02∫
2−2=2x=0⇒u=(0)2−0=0∫02(2x−1)ex2−xdx=∫02(2x−1)eudu2x−1
=∫02eudu=eu|02=e2−e0=e2−1

(12e1/xx2dx (17∫

12e1xx2dxu=1x⇒dudx=−1x2⇒dx=−x2dux=2⇒u=12x2=1x1xdx=∫
∫112eux2×−x2du=∫112−eudu=−eu|112=−e12+e=−e+e

(xxdx (18ee3ln∫

e=e3=3x=e⇒u=lnx⇒dudx=1x⇒dx=xdux=e3⇒u=lnxxdxu=lnee3ln∫
xxdx=∫13uxxdu=∫13u12du=23u32|13=23u3|13=2333−231∫ee3ln
13=23−23

(x3+x)x4+2x2+1dx (19)01∫

x3+x)x4+2x2+1dxu=x4+2x2+1⇒dudx=4x3+4x⇒dx=du4x3+4)01∫
xx=1⇒u=(1)4+2(1)2+1=4x=0⇒u=(0)4+2(0)2+1=1∫01(x3+x)x4+2
x2+1dx=∫14(x3+x)u×du4x3+4x=∫14(x3+x)u×du4(x3+x)=∫1414u
12du=16u32|14=16u3|14=1643−1613=76

(03xx2+1dx (20∫

03xx2+1dxu=x2+1⇒dudx=2x⇒dx=du2xx=3⇒u=10x=0⇒u=1∫03x∫
x2+1dx=∫110xu×du2x=∫11012u−12du=u12|110=u|110=10−1

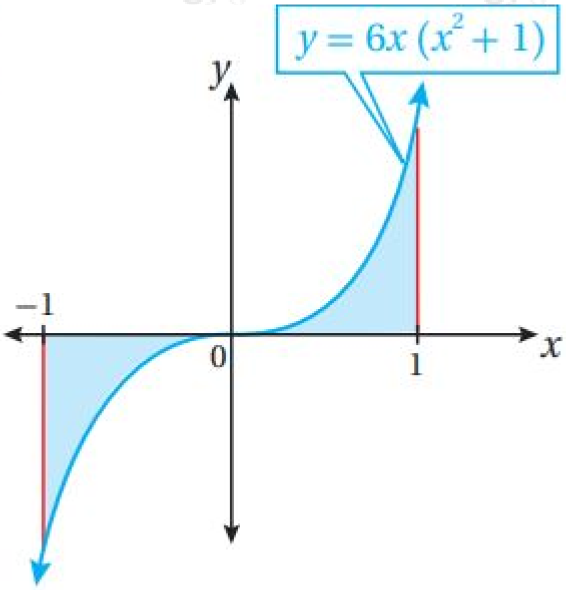
(122x+1(x2+x+4)3dx (21∫

122x+1(x2+x+4)3dxu=x2+x+4⇒dudx=2x+1⇒dx=du2x+1x=2⇒u∫

=(2)2+2+4=10x=1⇒u=(1)2+1+4=6∫122x+1(x2+x+4)3dx=∫6102
x+1u3×du2x+1=∫610u−3du=−12u−2|610=−12u2|610

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22



A=−∫−106x(x2+1)dx+∫016x(x2+1)dx

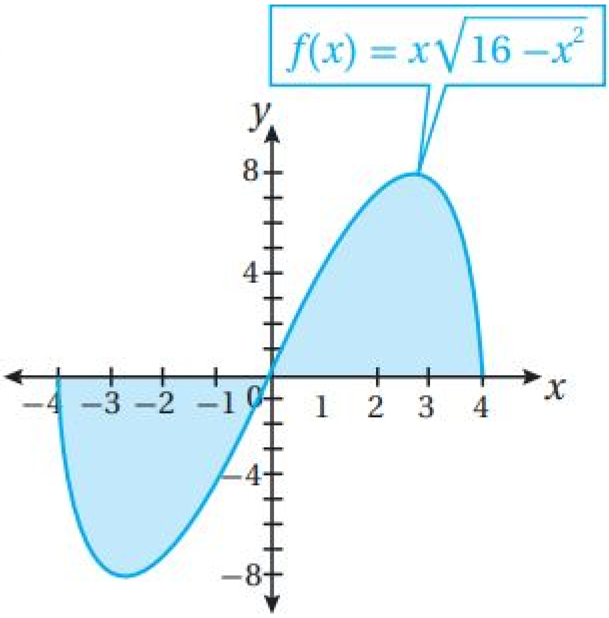
هناك طريقتان للحل: إما التكامل بالتعويض، أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس.

طريقة التكامل بالتعويض:

u=x2+1⇒dudx=2x⇒⇒dx=du2xx=0⇒u=(0)2+1=1x=−1⇒u=(−1)2+
1=2x=1⇒u=(1)2+1=2A=−∫−106x(x2+1)dx+∫016x(x2+1)dx=−∫2
16xu×du2x+∫126xu×du2x=−∫213udu+∫123udu=−32u2|21+32u2|
12=−32(1)2+32(2)2+32(2)2−32(1)2=9

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة.

23



A=−∫−40x16−x2dx+∫04x16−x2dxu=16−x2⇒dudx=−2x⇒dx=du−2xx=0⇒u=16−(0)2=16x=−4⇒u=16−(−4)2=0x=4⇒u=16−(4)2=0A=−∫−40x16−x2dx+∫04x16−x2dx=−∫016xu×du−2x+∫160xu×du−2x=∫01612u12du+∫160−12u12du=13u32|016+−13u32|160=13u3|016+−13u3|160=13(16)3−13(0)3−13(0)3+13(16)3=1283

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 1283 وحدات مربعة.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران f(x)، ونقطة يمر بها منحنى y=f(x) أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران f(x):

(f′(x)=xe4−x2;(−2,1) (24

f(x)=∫xe4−x2dxu=4−x2⇒dudx=−2x⇒dx=du−2xf(x)=∫xe4−x2dx=∫xeudu−2x=∫−12eudu=−12eu+C=−12e4−x2+C

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة 2,1-:

f(x)=−12e4−x2+C⇒f(−2)=−12e4−(−2)2+C⇒1=−12+C⇒C=32f(x)=−12e4−x2+32

(f′(x)=2x(1−x2)2;(0,−1) (25

f(x)=∫2x(1−x2)2dxu=1⇒dudx=−2x⇒dx=du−2xf(x)=∫2x(1−x2)2dx

$$=\int 2xu2\times du-2x=\int -u-2du=u-1+C=11-x2+C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة 0,-1:

$$f(x)=11-x2+C\Rightarrow f(0)=11-02+C\Rightarrow -1=1+C\Rightarrow C=-2f(x)=11-x2-2$$

(26) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $\iota(t)=-2t(1+t2)3$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم 4 m، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

$$s(t)=\int -2t(1+t2)3dtu=1+t2\Rightarrow dudt=2t\Rightarrow dt=du2t\int -2t(1+t2)3dt=\int -2tu3\times du2t=\int -u-32du=2u-12+C=2(1+t2)-12+C=21+t2+C$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم 4 m، إذن، s(0)=4:

$$s(t)=21+t2+C\Rightarrow f(0)=21+02+C\Rightarrow 4=2+C\Rightarrow C=2s(t)=21+t2+2$$

(27) زراعة: يمثل الاقتران V(t) سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t)=0.4t30.2t4+80003$ هو معدل التغير في سعر دونم الأرض، فأجد V(t)، علماً بأن سعره الآن 5000 JD.

$$V(t)=\int 0.4t30.2t4+80003dtu=0.2t4+8000\Rightarrow dudt=0.8t3\Rightarrow dt=du0.8t3$$
$$V(t)=\int 0.4t30.2t4+80003dx=\int 0.4t3u3\times du0.8t3=\int 12u-13du=13u23+C=13u23+C=13(0.2t4+8000)23+C$$

بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينار، إذن، V(0)=5000 ومنه:

$$V(t)=13(0.2t4+8000)23+CV(0)=13(0.2(0)4+8000)23+C5000=13(8000)23+C5000=4003+CC=146003V(t)=13(0.2t4+8000)23+146003$$

(28) سكان: أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى المدن يتغير سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $P'(t)=4e0.2t4+e0.2t$، حيث t عدد السنوات منذ عام

2015 م، وP(t) عدد السكان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد السكان عام 2015 م إلى عام 2025 م.

dt=du0.2e0.2tt=10⇒u=4+e0.2(10)=4+e2t=0⇒u=4+e0.2(0)=5∫0⇒104e0.2t4+e0.2tdt=∫54+e24e0.2tu×du0.2e0.2t=∫54+e220u−12du=40u12|54+e2=40u|54+e2=404+e2−405≈46

إذن يزداد عدد سكان هذه المدينة بحوالي 46 ألف شخص من 2015 م إلى 2025 م.