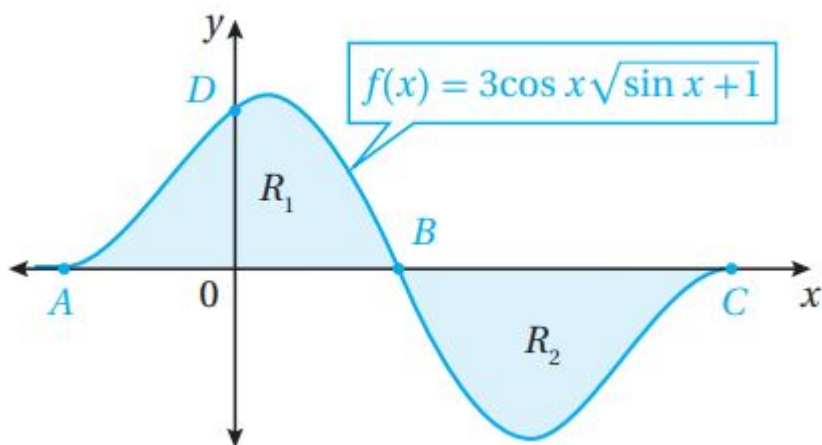


## مهارات التفكير العليا

### التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور  
بمثل منحنى الاقتران:  
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب  
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x=\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x=3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ since } \sin x = 0 \Rightarrow 3\cos x \sqrt{1 + \sin x} = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي  
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما:  $x = \pi/2, x = 3\pi/2$  بوضع  $n = 0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو:  $x = -\pi/2$  بوضع  $n = -1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما:  $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{1 + \sin x} dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$A = \int_{0}^2 3\cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x} = 3 \int_{0}^2 \sqrt{u} du = 3 \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{0}^2 = 2 \left[ u^{3/2} \right]_{0}^2 = 2(2^{3/2} - 0) = 4\sqrt{2}$$

(42) أبين أن للمنطقة  $R_1$  والمنطقة  $R_2$  المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} 2(3\cos x + \sin x) dx = -\int_0^{\pi/2} 2(3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة  $\int_1^{16} (x^3 + 1) dx$ .

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}, x^3 = u - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{u-1} \Rightarrow \int_1^{16} (x^3 + 1) dx = \int_1^{16} (u - 1 + 1) \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int_1^{16} u \frac{du}{x^2} = \frac{1}{3} \int_1^{16} u (u-1)^{-2/3} du = \frac{1}{3} \int_1^{16} (u-1)^{1/3} du = \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{4} (u-1)^{4/3} \right]_1^{16} = \frac{1}{4} (16-1)^{4/3} = \frac{1}{4} (15)^{4/3} = \frac{1}{4} (15 \sqrt[3]{15}) = \frac{15 \sqrt[3]{15}}{4}$$

(44) تبرير: إذا كان  $f$  اقتراناً متصلاً، فأثبت أن:  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ .

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du, x = \pi - u \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi}^{\pi/2} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن:  $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$ .

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46)  $\int_1^e (\ln x) dx$

bbb

(47)  $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48)  $\int_0^1 (2x + 1) \sin x dx$

bbb