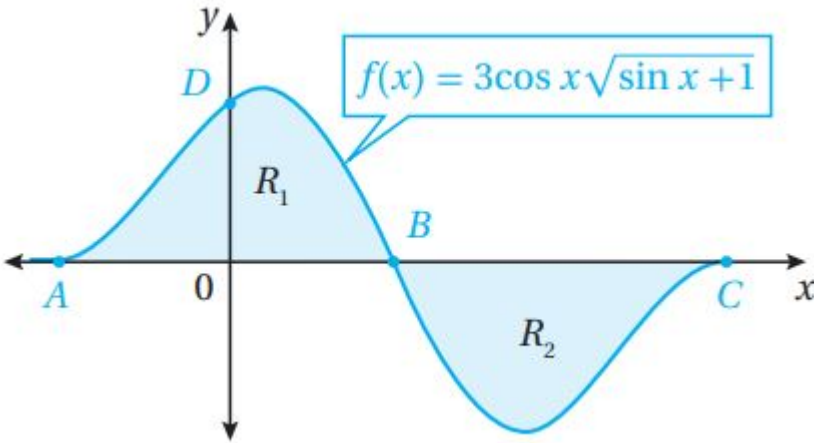


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ since } \sin x = 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ بوضع $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\frac{\pi}{2}$ بوضع $n = -1$

$$(A(-\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياتها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2, x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$A = 3 \int_0^2 \sqrt{u} du = 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 = 2 \cdot (2^{3/2} - 0) = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3u du = 42A(R_2) = -\int_{\pi/2}^{\pi} 2\pi^2(3\cos x + \sin x) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} -\pi^2(3\cos x + \sin x) dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} 203u du = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة $\int_0^1 (16x + x^3) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du, x^3 = u - 1 \Rightarrow u = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow u = 9 \int_0^{\sqrt[3]{2}} (16x + x^3) dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{29}{3} x^2 (1 + x^3) dx = \frac{29}{3} \int_0^{\sqrt[3]{2}} (1 + u) du = \frac{29}{3} (u + \frac{1}{2}u^2) \Big|_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{29}{3} (\sqrt[3]{2} + \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2})^2)$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow dx = -du, \sin(\pi - x) = \sin x \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin(\pi - x)) dx = \int_{\pi}^{\pi/2} f(\sin u) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(x) $\int_0^1 (\ln x)(\ln x) dx$

bbb

(x) $\int_0^{\pi/2} (7x + \cos x \sin x - \cos x) dx$

bbb

(x) $\int_0^1 (2x(1 + \sin x))^3 dx$

bbb