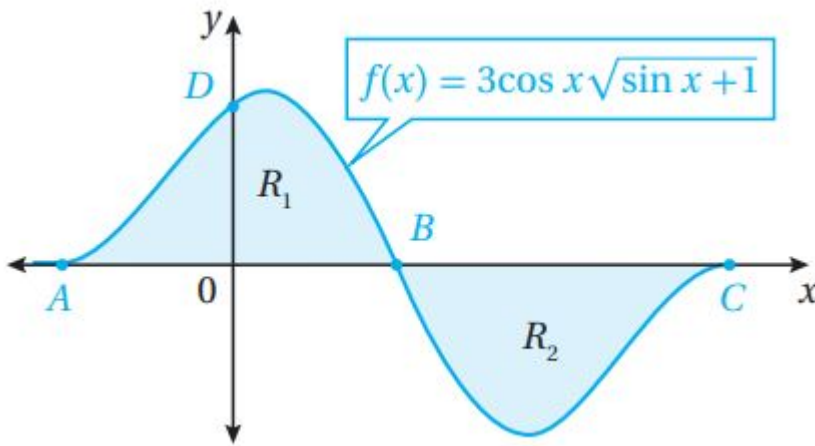


## مهارات التفكير العليا

### التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور  
بمثل منحنى الاقتران:  
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب  
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي  
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما:  $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ ، بوضع  $n = 0$

$$(B(\frac{\pi}{2}, 0), C(\frac{3\pi}{2}, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو:  $x = -\pi$ ، بوضع  $n = -1$

$$(A(-\pi, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما:  $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \Rightarrow \frac{du}{\cos x} = dx$$

$$A = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x}$$

$$= 3 \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u} du + 3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{u} du$$

$$= 3 \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + 3 \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 2 \left[ (1 + \sin x)^{3/2} \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \left[ (1 + \sin x)^{3/2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 2 \left[ (1 + 1)^{3/2} - (1 - 1)^{3/2} \right] + 2 \left[ (1 - 1)^{3/2} - (1 + 1)^{3/2} \right]$$

$$= 2 \left[ 2\sqrt{2} - 0 \right] + 2 \left[ 0 - 2\sqrt{2} \right] = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$$

(42) أبين أن للمنطقة  $R_1$  والمنطقة  $R_2$  المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة:  $\int_0^1 (16x^3 + x^4) dx$ .

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} \\ \int_0^1 (16x^3 + x^4) dx = \int_1^8 (16(u-1) + (u-1)^{4/3}) \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} = \frac{1}{3} \int_1^8 (16(u-1)^{1/3} + (u-1)^{2/3}) du \\ = \frac{1}{3} [48(u-1)^{4/3} + 3(u-1)^{5/3}] \Big|_1^8 = \frac{1}{3} [48(7)^{4/3} + 3(7)^{5/3} - 48(0)^{4/3} - 3(0)^{5/3}] = \frac{1}{3} [48 \cdot 49 + 3 \cdot 343] = \frac{1}{3} [2352 + 1029] = \frac{3381}{3} = 1127$$

(44) تبرير: إذا كان  $f$  اقتراناً متصلاً، فأثبت أن:  $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$ .

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du \\ \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن:  $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$ .

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46)  $\int_0^1 (\ln x) dx$

bbb

(47)  $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48)  $\int_0^1 (2x + 1 + \sin x) dx$

bbb