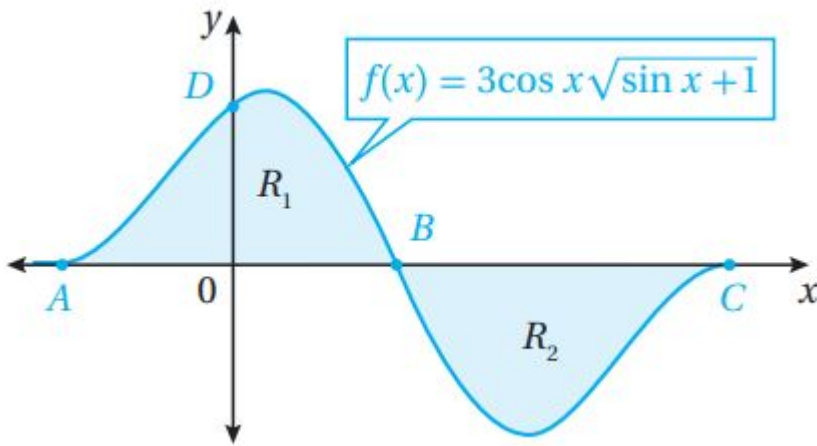


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب
عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x = \pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow x = 3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \pi/2, x = 3\pi/2$ بوضع $n = 0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi/2$ بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(D(0, f(0))) = (0, 3)$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x) dx$$

$$f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$$

$$u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$= 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{u} du + 3 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{u} du$$

$$= 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= 2 \left[(\sin x + 1)^{3/2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2 \left[(\sin x + 1)^{3/2} \right]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= 2 \left[(\sin(\pi/2) + 1)^{3/2} - (\sin(-\pi/2) + 1)^{3/2} \right] + 2 \left[(\sin(3\pi/2) + 1)^{3/2} - (\sin(\pi/2) + 1)^{3/2} \right]$$

$$= 2 \left[(2)^{3/2} - (0)^{3/2} \right] + 2 \left[(0)^{3/2} - (2)^{3/2} \right]$$

$$= 2 \left[2\sqrt{2} - 0 \right] + 2 \left[0 - 2\sqrt{2} \right] = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_0^1 (16x^3 + x^4) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{du}{3(u-1)^{2/3}}$$

$$\int_0^1 (16x^3 + x^4) dx = \int_1^8 (16(u-1) + (u-1)^2) \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} = \frac{1}{3} \int_1^8 (16(u-1)^{1/3} + (u-1)^{2/3}) du$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} (u-1)^{5/3} + \frac{3}{3} (u-1)^{2/3} \right]_1^8 = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} (7)^{5/3} + (7)^{2/3} \right] = \frac{1}{3} (7)^{2/3} (7 + 1) = \frac{8}{3} (7)^{2/3}$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_0^1 (\ln x) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x^3 + 1 + \sin x) dx$

bbb