

مهارات التفكير العليا

المعادلات التفاضلية

تحذ: أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dydx = xy^2 - xy - 1y^2 + y) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} dydx &= xy^2 - 1y^2 + y - xy \\ dydx &= 1y^2(x-1) - y(x-1) = (x-1)(1y^2 - y) \Rightarrow dy \frac{1}{y^2 - y} = (x-1)dx \\ \int \frac{1}{y^2 - y} dy &= \int (x-1) dx \\ \int \frac{1}{y(1-y)} dy &= \int (x-1) dx - 13 \int \frac{1}{1-y} dy \\ \ln \left| \frac{y}{1-y} \right| &= 12x^2 - x + C \end{aligned}$$

$$(dydx = x^2y - 1 - 2x^3y - 2) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} dydx &= x(12y - 1 - 23y - 2) = x(3y^2 - 4y + 26y^2 - 7y + 2) = x(-y^6y^2 - 7y + 2) \\ \Rightarrow 6y^2 - 7y + 2 - y dy &= x dx \\ \int (6y^2 - 7y + 2 - y) dy &= \int x dx \\ 2y^3 - 3.5y^2 + 2y - 0.5y^3 &= 0.5x^2 + C \\ 12x^2 + Cx &= 3y^2 + 7y - 2 \ln \end{aligned}$$

$$(y^2(35xtan^2y + tan^2x + tan^2)) \quad (35) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + tan^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 + tan^2 \\ dx \int \frac{1}{sec^2 y} dy &= \int (1 + tan^2 x) dx \\ \int sec^2 y dy &= \int (sec^2 x + tan^2 x) dx \\ \tan y &= x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 - cos 2y} dy \\ \tan y &= x + \frac{1}{2} \int \frac{1 + cos 2y}{1 - cos 2y} dy \\ \tan y &= x + \frac{1}{2} \int \frac{1 + cos 2y}{2 sin^2 y} dy \\ \tan y &= x + C \end{aligned}$$

تبرير: يمكن نمذجة معدل تحلل مادة مشعة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$, حيث x الكتلة المتبقية من المادة المشعة بالمليغرام بعد t يوماً، و $\lambda > 0$:

(36) أثبت أنه يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$, حيث a ثابت، مبرراً إجابتني.

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int -\lambda dt \Rightarrow \ln|x| = -\lambda t + C$$

لكن الكمية x لا تكون سالبة، فتحذف رمز القيمة المطلقة.

$$e^C x = e^{-\lambda t} \Rightarrow x = \frac{C}{e^{\lambda t}} = C e^{-\lambda t}$$

(37) إذا كان عمر النصف للمادة المشعة هو الوقت اللازم لتحلل نصف هذه المادة،

و a كتلة المادة الابتدائية، فأثبت أنّ عمر النصف للمادة المشعة هو $2\lambda \ln 2$ ، مبرراً إجابتي.

الكمية الابتدائية: $x(0)=a$

المطلوب: حساب الزمن الذي يكون عنده $x=12a$ ، نعوض:

$$2\lambda 2 \Rightarrow t = \ln 12a = a e^{-\lambda t} \Rightarrow 12 = e^{-\lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda t = \ln 2$$

تبرير: تمثل المعادلة التفاضلية: $dy/dx = -2x^3y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

(38) أجد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مبرراً إجابتي.

$$dy/dx = -2x^3y$$

لكي تكون العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، يجب أن تحققها.

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير x

$$2x + 2ny dy/dx = 0 \Rightarrow dy/dx = -x/ny$$

نعوض المشتقة في المعادلة التفاضلية:

$$x/ny = -2x^3y \Rightarrow 2nxy = 3xy^2 \Rightarrow n = 3xy^2/xy = 3/2$$

(39) أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(5,4)$ ، مبرراً إجابتي.

النقطة $(5,4)$ تحقق المعادلة:

$$a \Rightarrow a = 49 \Rightarrow x^2 + 32y^2 = 49 = (16)25 + 32 \Rightarrow$$

لإيجاد الإحداثي x لنقاط التقاطع منحنى العلاقة مع المحور x نضع $y=0$ في معادلتها

$$x^2 = 0 + 49 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow$$

إحداثيات نقطتي تقاطع العلاقة $x^2 + 32y^2 = 49$ مع المحور x هما $(7,0)$ ، $(-7,0)$