

مهارات التفكير العليا

المعادلات التفاضلية

تحد: أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dy/dx = xy^2 - xy - 1y^2 + y) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} dy/dx &= xy^2 - 1y^2 + y - xy \\ dy/dx &= 1y^2(x-1) - y(x-1) = (x-1)(1y^2 - y) \Rightarrow dy(1y^2 - y) = (x-1)dx \\ \int dy(1y^2 - y) &= \int (x-1)dx \\ \int (1y^2 - y)dy &= \int (x-1)dx \\ \frac{1}{3}|1-y^3| &= \frac{1}{2}x^2 - x + C \\ \frac{1}{3}dy &= \int (x-1)dx - 13 \ln \end{aligned}$$

$$(dy/dx = x^2y - 1 - 2x^3y - 2) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} dy/dx &= x(12y - 1 - 23y - 2) = x(3y - 2 - 4y + 26y^2 - 7y + 2) = x(-y^6y^2 - 7y + 2) \\ \Rightarrow 6y^2 - 7y + 2 - ydy &= xdx \\ \int (6y^2 - 7y + 2 - y)dy &= \int xdx \\ \int (-6y + 7 - 2y)dy &= \int xdx \\ |y| &= 12x^2 + Cx - 3y^2 + 7y - 2 \ln \end{aligned}$$

$$(y \quad (35) \quad x \tan^2 y + \tan^2 x + \tan^2 dy/dx = 1 + \tan^2$$

$$\begin{aligned} x \tan^2 y + \tan^2 x + \tan^2 dy/dx &= 1 + \tan^2 \\ x dx \int dy \sec^2 y &= \sec^2 x \int dx \sec^2 y \\ \sec^2 x (1 + \tan^2 x) &= \sec^2 y \sec^2 + \tan^2 \\ x dx \int (1 + \tan^2 x) dx &= \int \sec^2 y dy \\ \int (1 + \cos^2 y) dy &= \int \sec^2 x dx \\ \int \cos^2 y dy &= \int \sec^2 x dx \\ x + C &= \tan^2 y \sin \end{aligned}$$

تبرير: يمكن نمذجة معدل تحلل مادة مشعة بالمعادلة التفاضلية: $dx/dt = -\lambda x$ ، حيث x الكتلة المتبقية من المادة المشعة بالمليغرام بعد t يوماً، و $\lambda > 0$:

(36) أثبت أنه يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$ ، حيث a ثابت، مبرراً إجابتك.

$$|x| = -\lambda t + C \quad dx/dt = -\lambda x \quad \int dx/x = \int -\lambda dt \ln$$

لكن الكمية x لا تكون سالبة، فتحذف رمز القيمة المطلقة.

$$e^C \Rightarrow x = ae^{-\lambda t} \quad x = -\lambda t + C \quad x = e^{-\lambda t} + C = e^{-\lambda t} \times e^C \quad \ln \Rightarrow$$

(37) إذا كان عمر النصف للمادة المشعة هو الوقت اللازم لتحلل نصف هذه المادة،

و a كتلة المادة الابتدائية، فأثبت أنّ عمر النصف للمادة المشعة هو $2\lambda \ln 2$ ، مبرراً إجابتي.

الكمية الابتدائية: $x(0)=a$

المطلوب: حساب الزمن الذي يكون عنده $x=12a$ ، نعوض:

$$2\lambda 2 \Rightarrow t = \ln 12a = a e^{-\lambda t} \Rightarrow 12 = e^{-\lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda t = \ln 2$$

تبرير: تمثل المعادلة التفاضلية: $dy/dx = -2x^3y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

(38) أجد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مبرراً إجابتي.

$$dy/dx = -2x^3y$$

لكي تكون العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، يجب أن تحققها.

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير x

$$2x + 2ny dy/dx = 0 \Rightarrow dy/dx = -x/ny$$

نعوض المشتقة في المعادلة التفاضلية:

$$x/ny = -2x^3y \Rightarrow 2nxy = 3xy^2 \Rightarrow n = 3xy^2/xy = 3/2$$

(39) أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(5,4)$ ، مبرراً إجابتي.

النقطة $(5,4)$ تحقق المعادلة:

$$a \Rightarrow a = 49 \Rightarrow x^2 + 32y^2 = 49 = (16)25 + 32 \Rightarrow$$

لإيجاد الإحداثي x لنقاط التقاطع منحنى العلاقة مع المحور x نضع $y=0$ في معادلتها

$$x^2 = 0 + 49 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow$$

إحداثيات نقطتي تقاطع العلاقة $x^2 + 32y^2 = 49$ مع المحور x هما $(7,0)$ ، $(-7,0)$