أتحقق من فهمي

المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (127):

إذا كان: $G(7,5,-11), H(4,4,-4), K(4,5,3), L(7,7,3)$، فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

a) $\vec{GH}, \vec{KL}$

$\vec{GH}=\langle -3,-1,7\rangle$ ، $\vec{KL}=\langle 3,2,0\rangle$

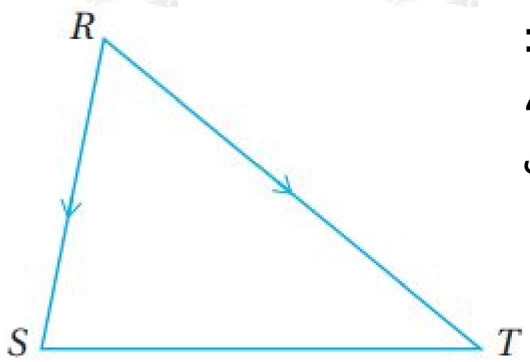
نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة ($\vec{GH}=c\vec{KL}$) صحيحة، ونستنتج أن $\vec{GH}, \vec{KL}$ غير متوازيين.

b) $\vec{GL}, \vec{HK}$

$\vec{GL}=\langle 0,2,14\rangle$ ، $\vec{HK}=\langle 0,1,7\rangle$

نلاحظ أن $\vec{GL}=2\vec{HK}$، ونستنتج أن $\vec{GL}\parallel\vec{HK}$

أتحقق من فهمي صفحة (129):



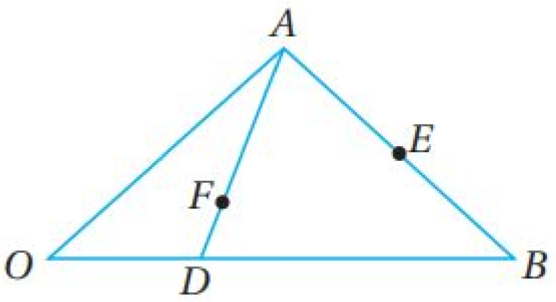
في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\vec{RS}=4\vec{a}, \vec{RT}=6\vec{b}$ والنقطة U منتصف $\overline{RS}$، والنقطة V منتصف $\overline{RT}$، فأثبت أن $\vec{ST}$ يوازي $\vec{UV}$.

$\vec{UV}=\vec{UR}+\vec{RV}=\frac{1}{2}(-4\vec{a})+\frac{1}{2}(6\vec{b})=3\vec{b}-2\vec{a}$
$\vec{ST}=\vec{SR}+\vec{RT}=-4\vec{a}+6\vec{b}=2(3\vec{b}-2\vec{a})$

إذن، $\vec{ST}=2\vec{UV}$, ومنه المتجهان $\vec{ST}, \vec{UV}$ متوازيان.

أتحقق من فهمي صفحة (130):

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB.



إذا كان: $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}$، وكانت النقطة D تقع على $\overline{OB}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{AB}$ ، والنقطة F تقع على $\overline{AD}$ ، حيث: $\vec{OF}=25(\vec{a}+\vec{b})$، فأثبت أن O، وF، وE تقع على استقامة واحدة.

$\vec{OF}=25(\vec{a}+\vec{b}) \Longrightarrow \vec{a}+\vec{b}=52\vec{OF}$.................(1) $\vec{OE}=\vec{OB}+\vec{BE}$
$=\vec{b}+12\vec{BA}=\vec{b}+12(\vec{BO}+\vec{OA})=\vec{b}+12(-\vec{b}+\vec{a})=12(\vec{a}+\vec{b})$
$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=2\vec{OE}$.................2

من العلاقتين (1) و(2) نستنتج أن:

$52\vec{OF}=2\vec{OE} \Rightarrow \vec{OF}=45\vec{OE}$

وهذا يعني أن المتجهين $\vec{OF}, \vec{OE}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن النقاط O,E,F تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

أتحقق من فهمي صفحة (132):

أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v}=\langle 1,-4,-5\rangle$، ويمر بالنقطة $U(0,-6,9)$.

$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v} \quad \vec{r}=\langle 0,-6,9\rangle+t\langle 1,-4,-5\rangle$

أتحقق من فهمي صفحة (133):

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المار بالنقطتين: $M(3,7,-9)$، و$N(2,-4,3)$.

NM→=⟨3−2,7−(−4),−9−3⟩=⟨1,11,−12⟩r→=r→0+tv→⇒r→=⟨3,7,−9⟩+⟨t⟨1,11,−12

أتحقق من فهمي صفحة (136):

تمثل: r→=11i^+5j^−6k^+t(7i^−2j^+5k^) معادلة متجهة للمستقيم l:

(a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو (39i^−3j^+14k^) تقع على المستقيم l.

r→=(11+7t)i^+(5−2t)ȷ^+(−6+5t)k^

نبحث عن قيمة ل t تحقق:

39i^−3ȷ^+14k^=(11+7t)i^+(5−2t)ȷ^+(−6+5t)k^39=11+7t⇒t=4
−3=5−2t⇒t=414=−6+5t⇒t=4

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه (t=4)، فإن القطة التي متجه موقعها 39i^−3ȷ^+14k^ وهي النقطة (39,−3,14) تقع على المستقيم l لأنها تنتج من تعويض t=4 في معادلته.

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة: t =-3.

t=−3⇒r→=(11+7(−3))i^+(5−2(−3))ȷ^+(−6+5(−3))k^=−10i^+11ȷ^^−21k

(c) إذا كانت النقطة (v,−3v,5v−1) تقع على المستقيم l، فما قيمة v؟

متجه الموقع للنقطة v,−3v,5v−1)2)ه^vı^−3vȷ^+(5v−1)k^

vi^−3vȷ^+(5v−1)k^=(11+7t)1^+(5−2t)ȷ^+(−6+5t)k^v=11+7t.........(1)−3v=5−2t.........(2)5v−1=−6+5t......(3)(1)×3+(2)⇒0=38+19t⇒t=−2⇒v=−3

تتحقق من أن v=−3,t=−2 تحققان المعادلة (3)

16−=16−(2−)6+5−=1−(3−)5

إذن، قيمة v التي تجعل النقطة (v,−3v,5v−1) واقعة على المستقيم l هي: v=−3

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

أتحقق من فهمي صفحة (136):

إذا كانت: $\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle+t\langle 1,11,-12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت: $\vec{r}=\langle -30,-6,30\rangle+u\langle 4,-6,3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l2، ، فأحدد إذا كان المستقيمان: l2,l1 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l1 هو $\vec{v}_1=\langle 1,11,-12\rangle$

اتجاه المستقيم l2 هو $\vec{v}_2=\langle 4,-6,3\rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}_1=k\vec{v}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين:

$\langle 3,7,-9\rangle+t\langle 1,11,-12\rangle=\langle -30,-6,30\rangle+u\langle 4,-6,3\rangle$
$3+t=-30+4u\Rightarrow t-4u=-33$...............(1)
$7+11t=-6-6u\Rightarrow 11t+6u=-13$...........(2)
$-9-12t=30+3u\Rightarrow 12t+3u=-39$...........(3)
$3\times(1)+2\times(2)\Rightarrow 25t=-125\Rightarrow t=-5,\ u=7$

نتحقق من أن $u=7, t=-5$ تحققان المعادلة (3)

$12(-5)+3(7)\overset{?}{=}-39 \quad -39=-39$

بما أن قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان.

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=-5$ في معادلة l1:

$\vec{r}=\langle 3,7,-9\rangle-5\langle 1,11,-12\rangle=\langle -2,-48,51\rangle$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2,-48,51)$

أتحقق من فهمي صفحة (138):

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: (0,7,0). وفي الوقت نفسه، أقلعت

طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2,0,0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8,15,16)$، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22,24,48)$. هل خطا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

اتجاه الطائرة الأولى هو اتجاه الطائرة الأولى هو
$\vec{v}_1=\langle 8-0,15-7,16-0\rangle=\langle 8,8,16\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{r}=\langle 0,7,0\rangle+t\langle 1,1,2\rangle$

اتجاه الثانية هو $\vec{v}_2=\langle 22-(-2),24-0,48-0\rangle=\langle 24,24,48\rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r}=\langle -2,0,0\rangle+u\langle 1,1,2\rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.