منهاجي
متعة التعليم الهادف

أتحقق من فهمي

الضرب القياسي

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (144):

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

(v→=⟨4,8,−3⟩,w→=⟨−3,7,2⟩ (a

v→⋅w→=4(−3)+8(7)−3(2)=−12+56−6=38

(m→=−3i^+5j^−k^,n→=−12i^+6j^−8k^ (b

m→⋅n→=−3(−12)+5(6)−1(−8)=36+30+8=74

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه u→ والمتجه W→ في كل مما يأتي، مقرباً الناتج إلى أقرب عشـر درجة:

(u→=−3i^+5j^−4k^,w→=4i^+2j^−3k^ (a

(u→⋅bbb|u→|=9+25+16=50|w→|=16+4+9=29u→⋅w→=−3(4)+5(2)−4(−3)=−12+10+12=10θ=cos−1
∘(101450)≈74.8(1050×29)=cos−1w→|u→||w→|)=cos−1

(u→=⟨2,−10,6⟩,w→=⟨−3,15,−9⟩ (b

u→|=4+100+36=140|w→|=9+225+81=315u→⋅w→=2(−3)−10(15)+6(9)=−6−150−54=−210θ=cos|
∘(−1)=180(−21044100)=cos−1(−210140×315)=cos−1(u→⋅w→|u→||w→|)=cos−1−1

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (147):

إذا كانت: r→=(3−21)+t(2−5−1) معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت:
r→=(530)+u(10−3) معادلة متجهة للمستقيم l2، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l1 والمستقيم l2 إلى أقرب درجة.

اتجاه المستقيم l1 هو v→=⟨2,−5,−1⟩ واتجاه المستقيم l2 هو u→=⟨1,0,−3⟩

|v→|=4+25+1=30|u→|=1+0+9=10v→⋅u→=1(2)+0(−5)−3(−1)=2+3=5θ=cos−1(u→⋅v→|u→||v→|)=cos−1(510×30)=cos−1(5300)≈73∘

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l1,l2 هو 73∘ تقريباً.

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (149):

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

E(2,1,−1),F(5,1,7),G(6,−3,1).

GF→=⟨−1,4,6⟩|GF→|=1+16+36=53GE→=⟨−4,4,−2⟩|GE→|=16+16+4=6GF→⋅GE→=−1(−4)+4(4)+6(−2)=4+16−12=8

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ، إذن:

θ=cos−1(GF→⋅GE→|GF→||GE→|)=cos−1(8653)≈79.4∘A=12|GF→|×|GE→|sinθ≈12×653sin79.4∘≈21.5

ويمكن إيجاد sinθ من معرفتنا بقيمة cosθ من دون أيجاد زاوية θ كما يأتي:

cosθ=4353⇒sinθ=1−(4353)2=477−16477=461353⇒A=12×653×461353=461≈21.5

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

أتحقق من فهمي صفحة (151):

إذا كانت: $\vec{r}=16\hat{i}+11\hat{j}-3\hat{k}+t(5\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l، والنقطة $P(2,0,103)$ غير واقعة على المستقيم l، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(a) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l.

اتجاه المستقيم l المعطى هو: $\vec{v}=\langle 5,7,-3\rangle$

افرض أن مسقط النقطة P على l النقطة F، فيكون متجه موقعها هو:

^OF→=(16+5t)ı^+(11+7t)ȷ^−(3+3t)k

ويكون العمود من P على l هو ‾PF حيث:

PF→=OF→−OP→=(16+5t)1^+(11+7t)ȷ^−(3+3t)k^−(2i^+103k^)⇒
^PF→=(14+5t)i^+(11+7t)ȷ^−(193+3t)k

ولأن المتجهين PF→,v→ متعامدان فإن PF→·v→=0

14+5t)+7(11+7t)−3(−193−3t)=0⇒t=−2⇒OF→=(16+5(−2))i^+)5⇒
^(11+7(−2))j^−(3+3(−2))k^=6i^−3j^+3k

إذن مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة F(6,−3,3)

(b) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l.

PF=(6−2)2+(−3−0)2+(3−103)2=2263

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

أتحقق من فهمي صفحة (154):

(a) أجد قياس ∠EDB في الهرم المبين في المثال السابق.

DE→=⟨7,8,2⟩|DE→|=49+64+4=117DB→=⟨8,4,−8⟩|DB→|=64+16+64=12DE→·DB→=7(8)+8(4)+2(−8)
∘(6117)≈56.3(7212117)=cos−1(DE→·DB→|DE→||DB→|)=cos−1=72θ=cos−1

(b) أجد حجم الهرم.

AB=82+(−2)2+(−2)2=72

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM، حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري الفاعدة المربعة: $M=(1+92,1-72,-1+32)=(5,-3,1)$

$EM=(-3)2+(-6)2+(-6)2=9$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

$V=13(72)2(9)=72(3)=216$

إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مربعة.