

مهارات التفكير العليا

التوزيع الطبيعي

(41) أكتشف الخطأ: قالت عيبر: "إذا كان: $X \sim N(6.4, 0.09)$ ، فإن 95% من البيانات تقع بين 6.22 و6.58". أكتشف الخطأ في قول عيبر، ثم أصححه.

تقع 95% من البيانات بين $\mu - 2\sigma$ ، $\mu + 2\sigma$ (حسب القاعدة التجريبية)، وهذا يعني الفترة من 5.8 إلى 7 وليس الفترة التي ذكرتها عيبر.

الخطأ الذي ارتكبه عيبر، هو أنها اعتبرت $\sigma = 0.09$ والصواب هو أن $\sigma = 0.09 = 0.3$.

(42) تبرير: إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، $P(X < 15) = 0.1469$ ، $P(X > 35) = 0.025$ ، فأجد قيمة كل من μ ، σ ، مبرراً إجابتي.

$$P(X < 15) = P(Z < 15 - \mu\sigma) = 0.1469$$

نفرض أن $\mu\sigma = z - 15$ ، فيكون $P(Z < z) = 0.1469$

الاحتمال المعطى (0.1469) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة

$$P(Z < -z) = P(Z > z) = 0.1469 = 1 - P(Z < z) \Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.1469 = 0.8531 \Rightarrow z = 1.05$$

إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى هي -1.05

$$\mu\sigma = -1.05 \Rightarrow 15 - \mu = -1.05\sigma \dots\dots\dots 1 \Rightarrow P(X > 35) = P(Z > 35 - \mu - 15) = P(Z > 20 - \mu\sigma) = 0.025$$

نفرض أن $\mu\sigma = z - 35$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.025$

الاحتمال المعطى (0.025) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z موجبة

$$P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.025 = 0.975 \Rightarrow z = 1.96 \Rightarrow 35 - \mu\sigma = 1.96 \Rightarrow 35 - \mu = 1.96\sigma \dots\dots\dots 22 - 1: 20 = 3.01\sigma \Rightarrow \sigma \approx 6.64, \mu \approx 22$$

(43) تبرير: تقدم 100000 طالب لاختبار دولي، وبلغ عدد الطلبة الذين زادت علاماتهم في الاختبار على 90% نحو 10000 طالب، منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95%. إذا كانت علامات الطلبة المتقدمين تتبع توزيعاً طبيعياً، فأجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات.

$$P(X > 90) = P(Z > 90 - \mu\sigma) = 10000/100000 = 0.1$$

نفرض أن $\mu\sigma = Z - 90$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.1$

الاحتمال المعطى (0.1) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة Z وهو أقل من 0.5، إذن: Z موجبة

$$P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.1 = 0.9 \Rightarrow z = 1.28 \Rightarrow 90 - \mu\sigma = 1.28 \Rightarrow 90 - \mu = 1.28 \Rightarrow 8\sigma \dots \dots 1$$

$$P(X > 95) = P(Z > 95 - \mu\sigma) = 5000/100000 = 0.05$$

نفرض أن $\mu\sigma = z - 95$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة Z وهو أقل من 0.5، إذن: Z موجبة

$$P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow 95 - \mu\sigma = 1.64 \Rightarrow 95 - \mu = 1.64 \Rightarrow 1.64\sigma \dots \dots 2$$

$$5 = 0.36\sigma \Rightarrow \sigma \approx 13.89, \mu \approx 72.22$$

(44) تحد: أجرت باحثة تفاعلاً كيميائياً بصورة متكررة، فوجدت أن الزمن اللازم لحدوث التفاعل يتبع توزيعاً طبيعياً، وأن 5% من التجارب يلزمها أكثر من 13 دقيقة لحدوث التفاعل، وأن 12% منها تتطلب أقل من 10 دقائق لحدوث التفاعل. أقدّر الوسط الحسابي والانحراف المعياري لزمن التفاعل.



$$P(X > 13) = P(Z > 13 - \mu\sigma) = 0.05$$

نفرض أن $\mu\sigma = Z - 13$ ، فيكون $P(Z > z) = 0.05$

الاحتمال المعطى (0.05) يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة Z وهو أقل من 0.5، إذن: Z موجبة

$$P(Z < z) = 1 - P(Z > z) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow 13 - \mu\sigma = 1.64 \Rightarrow 13 - \mu = 1.64\sigma \dots \dots 1P(X < 10) = P(Z < 10 - \mu\sigma) = 0.12$$

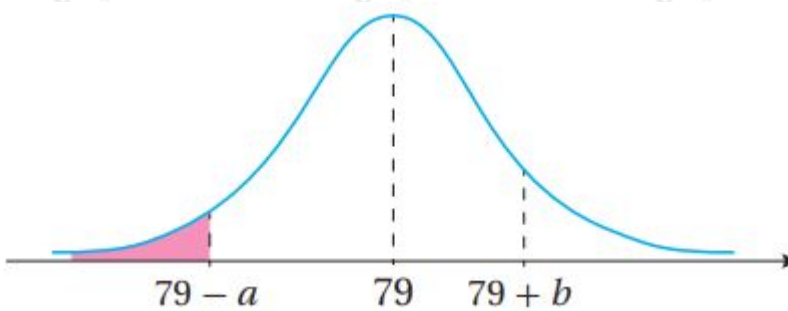
نفرض أن $\mu\sigma = Z - 10$ ، فيكون $P(Z < z) = 0.12$

الاحتمال المعطى (0.12) يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة z وهو أقل من 0.5، إذن: z سالبة

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z) 0.12 = 1 - P(Z < z) \Rightarrow P(Z < z) = 0.88 \Rightarrow z = 1.17 \Rightarrow$$

إذن، قيمة z التي تحقق الاحتمال المعطى $P(Z < z) = 0.12$ هي $z = -1.17$

$$\mu\sigma = -1.17 \Rightarrow 10 - \mu = -1.17\sigma \dots \dots 2(1) - (2): 3 = 2.81\sigma \Rightarrow \sigma \approx 1.07, -10 \Rightarrow \mu \approx 11.25$$



تبرير: بين الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X الذي وسطه الحسابي 79، وتباينه 144. إذا كان: $P(79 - a \leq X \leq 79 + b) = 0.6463$ وكان:

$$P(X \geq 79 + b) = 2P(X \leq 79 - a)$$

(45) مساحة المنطقة المظللة.

المساحة الكلية تحت المنحنى هي 100%

المساحة تحت المنحنى بين القيمتين $79 - a$ و $79 + b$ هي 64.63%

إذن، المساحة تحت المنحنى خارج القيمتين $79 - a$ و $79 + b$ هي:

$$35.37\% = 64.63\% - 100\%$$

وهي تمثل منطقتين إحداهما مساحتها ضعف الأخرى (حسب المعطى)، فتكون مساحة المنطقة المظللة تساوي $11.79\% = 3\% \times 35.37\%$

أو نكتب:

$$P(79-a \leq X \leq 79+b) = P(X \leq 79+b) - P(X \leq 79-a) \Rightarrow P(X \leq 79+b) - P(X \leq 79-a) = 0.6463 \dots \dots \dots (1)$$

$$P(X \geq 79+b) = 2P(X \leq 79-a) \Rightarrow 1 - P(X < 79+b) = 2P(X \leq 79-a) \Rightarrow P(X < 79+b) + 2P(X \leq 79-a) = 1 \dots \dots \dots (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 3P(X \leq 79-a) = 0.3537 \Rightarrow P(X \leq 79-a) = 0.1179, P(X \geq 79+b) = 0.2358$$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي: $P(X \leq 79-a) = 0.1179$

(46) قيمة الثابت b .

وجدنا في السؤال السابق أن:

$$P(X \geq 79+b) = 0.2358 \Rightarrow P(Z \geq 79+b - 7912) = 0.2358 \Rightarrow P(Z \geq b12) = 0.2358$$

نفرض أن $b12 = z$ ، فيكون:

$$P(Z \geq z) = 0.2358 \Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2358 = 0.7642 \Rightarrow z = 0.72 \Rightarrow b12 = 0.72 \Rightarrow b = 8.64$$