

أدرب وأحل المسائل

الشرط الأولي

$f(x)$ في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران ، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$.
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

(1) $f(x) = x^7$

$$f(x) = f(x-3) \quad dx = 12x^2 - 3x + C \quad 9 = 12 \times (2)^2 - 3(2) + C \quad C = 13 \quad f(x) = 12x^2 - 3x + 13$$

(2) $f(x) = x^2 - 4; (0, 7)$

$$f(x) = f(x^2 - 4) \quad dx = 13x^3 - 4x + C \quad 7 = 13 \times (0)^3 - 4(0) + C \quad C = 7 \quad f(x) = 13x^3 - 4x + 7$$

(3) $f(x) = 6x^2 - 4x + 2; (1, 9)$

$$f(x) = f(6x^2 - 4x + 2) \quad dx = 2x^3 - 2x^2 + 2x + C \quad 9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C \quad C = 7 \quad f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$$

(4) $f(x) = x + 14x^2; (4, 11)$

$$f(x) = f(x + 14x^2) \quad dx = f(x^2 + 14x^2) \quad dx = 23x^3 - 112x^3 + C \quad 11 = 23(4)^3 - 112(4)^3 + C \quad C = 11 \quad f(x) = 23x^3 - 112x^3 + 11$$

(5) $f(x) = (x+2)^2; (1, 7)$

$$f(x) = f(x+2)^2 \quad dx = f(x^2 + 4x + 4) \quad dx = 13x^3 + 2x^2 + 4x + C \quad 7 = 13(1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) + C \quad C = 23 \quad f(x) = 13x^3 + 2x^2 + 4x + 23$$

(6) $f(x) = 3x - x; (4, 0)$

$$f(x) = f(3x - x) \quad dx = f(3x - 12 - x) \quad dx = 6x^2 - 12x^2 + C = 6x - 12x^2 = 0 \quad 0 = 6(4) - 12(4)^2 + C \quad C = -4 \quad f(x) = 6x - 12x^2 - 4$$

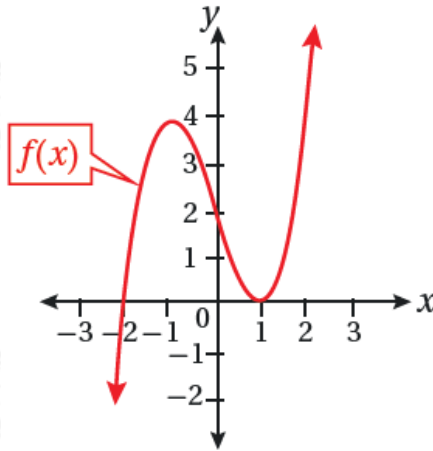
(7) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علماً بأنَّ منحناها يمر بالنقطة $(0, 5)$.

$$y = \int (0.4x + 3) dx = 0.2x^2 + 3x + C = 0.2(0)^2 + 3(0) + C = 5 \Rightarrow y = 0.2x^2 + 3x + 5$$

(8) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = x^2 + 10x$ ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ ، علماً بأنَّ منحناها يمر بالنقطة $(5, 2)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x^2 + 10x dx = \int (x^2 + 10x) dx = \int (x^2 + 10x - 2) dx = x^3 - 10x - 2 + C \\ &= x^3 - 10x + C = 2 = 125 - 50 + C \Rightarrow C = 13 \end{aligned}$$

(9) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$.
فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



$$f(x) = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 2)$ ، إذن:

$$2 = (0)^3 - 3(0) + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$$



بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قطره y سنتمراً بعد t ثانية.

إذا كان: $\frac{dy}{dt} = 4t - 23$, $t > 0$, وكان نصف قطر البالون بعد 8 ثوانٍ من بدء نفخه 30 cm, فأجد كلاً مما يأتي:

(10) قاعدة العلاقة y بدلالة t .

$$y = \int (4t - 23) dt = 2t^2 - 23t + C = 2(8)^2 - 23(8) + C = 128 - 184 + C = -56 + C$$

(11) نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه.

$$y = 2(27)^2 - 23(27) + 42 = 2916 - 621 + 42 = 2337$$

إذن نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: 42 cm



(12) أشجار: في دراسة تناولت نوعاً معيناً من الأشجار تبين أن ارتفاع هذه الأشجار يتغير بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: $h'(t) = 0.2t^3 + t$, حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft فأجد $h(t)$.

$$h(t) = \int (0.2t^3 + t) dt = 0.05t^4 + 0.5t^2 + C = 0.05(2)^4 + 0.5(2)^2 + C = 0.8 + 2 + C = 2.8 + C$$

ft بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها 2, فإن $h(0) = 2$, وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C .

$$2 = 0.05(0)^4 + 0.5(0)^2 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow h(t) = 0.05t^4 + 0.5t^2 + 2$$

(13) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجُسيم حركته من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (2t + 3) dt = t^2 + 3t + C$$

$s(0) = 0$ بما أن الجُسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $C = 0$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C .

$$s(t) = t^2 + 3t + C \quad 0 = (0)^2 + 3(0) + C \quad C = 0 \quad s(3) = (3)^2 + 3(3) = 18$$

إذن موقع الجُسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: 18 m

(14) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتري لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 3 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بدء حركته، فأجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

m/s بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي 1، فإن $v(1) = 1$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

$$1 = \frac{1}{3}(1)^3 + C_1 \quad C_1 = \frac{2}{3} \quad v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3} \quad s(t) = \int v(t) dt = \int (\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}) dt = \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + C_2$$

m بما أن الموقع الابتدائي للجُسيم هو 3، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 .

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + C_2 \quad 3 = \frac{1}{12}(0)^4 + \frac{2}{3}(0) + C_2 \quad C_2 = 3 \quad s(2) = \frac{1}{12}(2)^4 + \frac{2}{3}(2) + 3 = 5$$

إذن موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: 5 m

(15) يتحرك جُسيم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$ ، حيث t

الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتري لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجسم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة هي 2 m/s ، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بدء الحركة.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int (9 - 2t) dt = 9t - t^2 + C_1$$

m/s بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي 2 ، فإن $v(0) = 2$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

$$v(0) = 9(0) - (0)^2 + C_1 = 2 \implies C_1 = 2$$

$$v(t) = 9t - t^2 + 2$$

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (9t - t^2 + 2) dt = 12t^2 - 13t^3 + 2t + C_2$$

$s(0) = 0$ بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 .

$$s(0) = 12(0)^2 - 13(0)^3 + 2(0) + C_2 = 0 \implies C_2 = 0$$

$$s(t) = 12t^2 - 13t^3 + 2t$$

$$s(2) = 12(2)^2 - 13(2)^3 + 2(2) = 583$$

إذن موقع الجسم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: 583 m