أتدرب وأحل المسائل

الشرط الأولي

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

(1) $f(x) = x^7$

f(x)=∫(x−3) dx=12x2−3x+C9=12×(2)2−3(2)+CC=13f(x)=12x2−3x+13

(2) f′(x)=x2−4; (0,7)

f(x)=∫(x2−4) dx=13x3−4x+C7=13×(0)3−4(0)+CC=7f(x)=13x3−4x+7

(3) f′(x)=6x2−4x+2; (1,9)

f(x)=∫(6x2−4x+2) dx=2x3−2x2+2x+C9=2(1)3−2(1)2+2(1)+CC=7f(x)=2x3−2x2+2x+7

(4) f′(x)=x+14x2; (4,11)

f(x)=∫(x+14x2) dx=∫(x12+14x2) dx=23x32−112x3+C11=23(4)32−112(4)3+CC=11f(x)=23x32−112x3+11=23x3−112x3+11

(5) f′(x)=(x+2)2; (1,7)

f(x)=∫(x+2)2 dx=∫(x2+4x+4) dx=13x3+2x2+4x+C7=13(1)3+2(1)2+4(1)+CC=23f(x)=13x3+2x2+4x+23

(6) f′(x)=3x−x; (4,0)

f(x)=∫(3x−x) dx=∫(3x−12−x) dx=6x12−12x2+C=6x−12x20=64−12(4)2+CC=−4f(x)=6x−12x2−4

(7) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: dydx=0.4x+3 ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علماً بأنّ منحناها يمر بالنقطة (5 ,0).

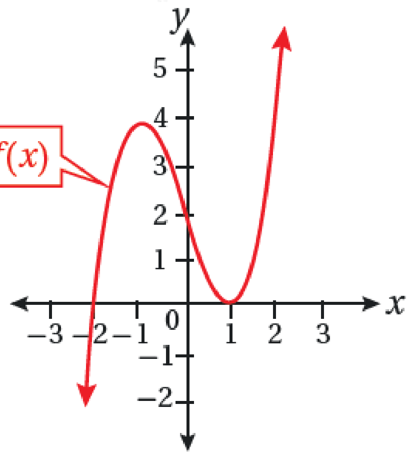
y=∫(0.4x+3) dx=0.2x2+3x+C5=0.2(0)2+3(0)+CC=5y=0.2x2+3x+5

(8) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: f′(x)=x2+10x2 ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علماً بأنّ منحناها يمر بالنقطة (2 ,5).

f(x)=∫x2+10x2dx=∫(x2x2+10x2)dx=∫(1+10x−2)dx=x−10x−1+C
=x−10x+C2=5−105+CC=−1f(x)=x−10x−1

(9) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: f′(x)=3x2 - 3 .

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



f(x)=∫(3x2−3)dx=x3−3x+C

منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0, 2)، إذن:

2=(0)3−3(0)+CC=2f(x)=x3−3x+2

بالون: عند نفخ بالون كروي الشكل يصبح نصف قطره y سنتمتراً بعد t ثانية.

إذا كان: dydt=4t−23, t>0، وكان نصف قطر البالون بعد 8 ثوانٍ من بدء نفخه 30 cm ، فأجد كلاً مما يأتي:

(10) قاعدة العلاقة y بدلالة t .

y=∫4t−23dt=12t13+C=12t3+C30=1283+CC=6y=12t3+6

(11) نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه.

y=12273+6=42

إذن نصف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه هو: 42 cm

(12) أشجار: في دراسة تناولت نوعاً معيناً من الأشجار تبين أن ارتفاع هذه الأشجار يتغير بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران: h′(t)=0.2t23+t ، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft فأجد $h(t)$.

h(t)=∫(0.2t23+t)dt=∫(0.2t23+t12)dt=0.12t53+23t32+C=0.12t53+23t3+C

بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها 2 ft ، فإن $h(0) = 2$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C .

2=0.12(0)53+23(0)3+CC=2h(t)=0.12t53+23t3+2

(13) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسيم حركته من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

s(t)=∫v(t)dt=∫(2t+3)dt=t2+3t+C

بما أن الجُسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C .

s(t)=t2+3t+C0=(0)2+3(0)+CC=0s(t)=t2+3ts(3)=(3)2+3(3)=18

إذن موقع الجُسيم بعد 3ثوان من بدء الحركة هو: 18 m

(14) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 3 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بدء حركته، فأجد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

v(t)=∫a(t)dt=∫t2dt=12t3+C1

بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي 1 m/s ، فإن $v(1) = 1$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

1=12(1)3+C1C1=12v(t)=12t3+12s(t)=∫v(t)dt=∫(12t3+12)dt=18t4+12t+C2

بما أن الموقع الابتدائي للجُسيم هو 3 m ، فإن $s(0) = 3$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 .

s(t)=18t4+12t+C23=18(0)4+12(0)+C2C2=3s(t)=18t4+12t+3s(2)=18(2)4+12(2)+3=5

إذن موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: 5 m

(15) يتحرك جُسيم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$ ، حيث t

الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة هي 2 m/s ، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بدء الحركة.

v(t)=∫a(t)dt=∫(9−2t)dt=9t−t2+C1

بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي 2 m/s ، فإن $v(0) = 2$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

v(t)=9t−t2+C12=9(0)−(0)2+C1C1=2v(t)=9t−t2+2s(t)=∫v(t)dt=∫(9t−t2+2)dt=12t2−13t3+2t+C2

بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 .

s(t)=12t2−13t3+2t+C20=12(0)2−13(0)3+2(0)+C2C2=0s(t)=12t2−13t3+2ts(2)=12(2)2−13(2)3+2(2)=583

إذن موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: 583 m