

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u \Rightarrow ds = du$$

$$2s^3 + 4s = 2u^3 + 4u$$

$$\int (2u^3 + 4u) du$$

$$= \frac{2u^4}{4} + \frac{4u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}u^4 + 2u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}(2s^2 + 4s) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1 \quad \text{عندما } u = 1 + \sqrt{5} \leftarrow x = 2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_{1+\sqrt{5}}^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} du$$

$$= \frac{2}{5} \int_{1+\sqrt{5}}^3 \frac{1}{u} du = \frac{2}{5} \left[\ln u \right]_{1+\sqrt{5}}^3 = \frac{2}{5} (\ln 3 - \ln(1+\sqrt{5}))$$

$$= \frac{2}{5} \ln \frac{3}{1+\sqrt{5}}$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \left(\frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \left(1 + \frac{1}{u} \right) du$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-1}{2x} dx$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{4} \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]$

(٤) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

$= \int \frac{1}{1+u} du$

$= \ln|1+u| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

$= \ln|1+x^2| + C$

