

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$3s^2 + 4 = \frac{ds}{du}$$

$$ds = (3s^2 + 4) du$$

$$\int (3s^2 + 4) ds = \int (3u^2 + 4) du$$

$$\int (3u^2 + 4) du = u^3 + 4u + C$$

$$= \frac{1}{3}(3s^2 + 4) + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1 \quad \text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx = \int_3^1 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} du$$

$$= \frac{2}{5} \int_3^1 \frac{1}{u} du = \frac{2}{5} \left[\ln|u| \right]_3^1 = \frac{2}{5} (\ln 1 - \ln 3) = -\frac{2}{5} \ln 3$$

$$\frac{2}{5} = 3 - x \cdot \frac{2}{5} = (3-x) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{16}{5} - \frac{2x}{5} \right) \cdot \frac{2}{5}$$

(٤) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ du &= 2x dx \end{aligned}$$

$\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

$= \int \frac{u + 1}{u} du$

$= \int \left(\frac{u}{u} + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \left(1 + \frac{1}{u} \right) du$

$= \int \frac{1}{1-x^2} dx$

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -2x \\ du &= -2x dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx$

$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{1-x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx \right] = \frac{1}{2} \left[-\ln|1-x| - \ln|1+x| \right]$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

