

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2s^3 + 4s^2 + 3s + 2) ds$

الحل

$$\text{نفرض أن } s = u$$

$$ds = du$$

$$ds = \frac{du}{1}$$

$$\int (2u^3 + 4u^2 + 3u + 2) \cdot \frac{du}{1}$$

$$\int (2u^3 + 4u^2 + 3u + 2) du$$

$$\frac{2}{4} u^4 + \frac{4}{3} u^3 + \frac{3}{2} u^2 + 2u + C$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_1^3 \frac{1}{1+\sqrt{5x}} dx$$

الحل

$$0 = \frac{dx}{\sqrt{5x}} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5x} = u$$

$$\cdot \quad dx = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\text{عندما } u = 3 \leftarrow x = 1$$

$$\text{عندما } u = 1 \leftarrow x = 0$$

$$\int_1^3 \frac{1}{u} \cdot \frac{2\sqrt{5x}}{5} = \frac{2\sqrt{5x}}{5} \cdot \frac{1}{u} \int_1^3$$

$$\int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5u} = \int_1^3 \frac{2\sqrt{5x}}{5(1+\sqrt{5x})}$$

$$\frac{2}{5} = 3 - x \cdot \frac{2}{5} = (4-1) \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right)$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$(2) \int 2s \sqrt{s^2-1} ds$$

$$(3) \int (4s-1) \sqrt{s^2-2s-1} ds$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{s+1}} ds$$

الحل

$$(1) \int 3s^2(1+s^2)^{-5} ds$$

$$\begin{aligned} v &= 1+s^2 \\ dv &= 2s \\ ds &= \frac{dv}{2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int 3s^2 v^{-5} \cdot \frac{dv}{2s} \\ &= \int \frac{3}{2} s v^{-5} dv \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{v^{-5}}{v} dv = \frac{3}{2} \int v^{-6} dv$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{v^{-5}}{-5} \right) + C = -\frac{3}{10} \frac{1}{v^5} + C = -\frac{3}{10} \frac{1}{(1+s^2)^5} + C$$

(٤) $\int \sqrt{1-x} \cdot x \, dx$

$$\begin{aligned} u &= 1-x \\ \frac{du}{dx} &= -1 \\ du &= -dx \end{aligned}$$

$\int \sqrt{u} \cdot (-du)$

$= -\int \sqrt{u} \, du$

$= -\frac{2}{3} u^{3/2} + C$

$= -\frac{2}{3} (1-x)^{3/2} + C$

(٣) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} \, dx$

$$\begin{aligned} u &= 1-x-2x^2 \\ \frac{du}{dx} &= -1-4x \\ du &= -1-4x \, dx \end{aligned}$$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} \, dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} \, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (As + B)^n ds, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان, } A \neq 0, n \neq -1$$

$$(2) \int (As + B)^n ds, \text{ حيث } A, B \text{ ثابتان, } A \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (As + B)^n ds = \frac{(As + B)^{n+1}}{(n+1)A} + C$$

$$(2) \int (As + B)^n ds = \frac{(As + B)^{n+1}}{(n+1)A} + C$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(s^2 - 1)^2} ds \quad (2) \int \frac{1}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} ds$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(s^2 - 1)^2} ds = \int \frac{1}{(s-1)^2(s+1)^2} ds = \int \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} ds$$

$$(2) \int \frac{1}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} ds = \int \frac{1}{(s-1)(s+1)(s^2 + 1)} ds = \int \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} ds$$