إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١ - ٢س)(س - س^{٢})^{٤}\, ؤس$

ب) $\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}}\, ؤس$

جـ) $\int (٢س - ٣س^{٢})\, قا^{٢}(س^{٣} - س^{٢})\, ؤس$

د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}\, ؤس$

الحل

أ) $\int (١ - ٢ى)(س - س^{٢})^{٤}\, ؤس$.

$ص = س - س^{٢} \Leftarrow \frac{ؤص}{ؤى} = ١ - ٢ى \Leftarrow ؤس = \frac{ؤص}{١ - ٢ى}$

$\int (١ - ٢ى)\, ص^{٤}\, \frac{ؤص}{١ - ٢ى} = \int ص^{٤}\, ؤص$

$= \frac{ص^{٥}}{٥} + ج = \frac{(س - س^{٢})^{٥}}{٥} + ج$

ب) $\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢ى^{٣} - ٢)^{٢}}\, ؤس$

$ص = ٢ى^{٣} - ٢ \Leftarrow \frac{ؤص}{ؤى} = ٦ى^{٢} \Leftarrow ؤس = \frac{ؤص}{٦ى^{٢}}$

$\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{ص^{٢}}\, \frac{ؤص}{٦ى^{٢}} = \int ص^{\frac{٢}{٥}}\, ؤص$

$$\frac{ص^{ن+1}}{ن+1} + جـ = \frac{ص^{\frac{7}{5}+1}}{\frac{7}{5}+1} + جـ$$

$$= \frac{5}{7} ص^{\frac{7}{5}} + جـ$$

$$= \frac{5}{7} (ص^3 - 2)^{\frac{7}{5}} + جـ$$

ب) $\int (3ع^2 - 2ع)(ع^3 - ع^2)^{\frac{2}{5}} \, دع$

$ص = ع^3 - ع^2 \Rightarrow \frac{دص}{دع} = 3ع^2 - 2ع$

$دص = (3ع^2 - 2ع) \, دع$

$\int ص^{\frac{2}{5}} \, دص$ (-1)

$= - \int ص^{\frac{2}{5}} \, دص$

$= - ظا ص + جـ$

$= - ظا (ع^3 - ع^2) + جـ$

د) $\int \frac{3ع - 9}{(ع^2 - 6ع)^2} \, دس$

$ص = ع^2 - 6ع \Rightarrow \frac{دص}{دع} = 2ع - 6$

$دص = (2ع - 6) \, دع$

$\int \frac{3ع - 9}{ص^2} \times \frac{دص}{2ع - 6}$

$= \int \frac{3(ع - 3)}{ص^2} \times \frac{دص}{2(ع - 3)}$

$= \int 3 ص^{-2} \times \frac{1}{2} \, دص$

$= \frac{3}{2} \frac{ص^{-2+1}}{-2+1} + جـ$

$= - \frac{3}{2ص} + جـ$

$= - \frac{3}{2(ع^2 - 6ع)} + جـ$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(3س-2)^2}\, ds$ ب) $\int (س-1)(2س^2-4س+1)^5\, ds$

جـ) $\int 2 قا^2(2-س)\, ds$ د) $\int 2س^3 جا(س^4+1)\, ds$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(3س-2)^2}\, ds = \int (3س-2)^{\frac{2}{3}}\, ds = \frac{(3س-2)^{\frac{2}{3}+1}}{3 \times (\frac{2}{3}+1)} + جـ$

$= \frac{(3س-2)^{\frac{5}{3}}}{3 \times \frac{5}{3}} + جـ = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(3س-2)^5} + جـ$

ب) $\int (س-1)(2س^4-4س+1)^5\, ds$

$ص = 2س^4-4س+1 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 4س^3-4$

$ds = \frac{ds}{4س^3-4} \Leftarrow ds = \frac{ds}{4(س-1)}$

$\int (س-1) ص^5 \times \frac{ds}{4(س-1)} = \frac{1}{4}\int ص^5\, ds$

$= \frac{ص^6}{4 \times 6} + جـ = \frac{(2س^4-4س+1)^6}{24} + جـ$

جـ) $\int 2 قا^2(2-س)\, ds =$

$\frac{2 ظا(2-س)}{-1} + جـ$

$-2 ظا(2-س) + جـ$

د) $\int 2س^3 جا(س^4+1)\, ds$

$ص = س^4+1 \Rightarrow \frac{ds}{ds} = 4س^3 \Leftarrow$

$ds = \frac{ds}{4س^3}$

$\int 2س^3 جا ص \frac{ds}{4س^3} =$

$\int \frac{1}{2} جا ص\, ds = -\frac{1}{2} جتا ص + جـ$

$= -\frac{1}{2} جتا(س^4+1) + جـ$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{0}^{2} \sqrt{٤س + ١}\ د س$

ب) $\int_{-١}^{١} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣}\ د س$

جـ) $\int_{١}^{٢} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\ د س$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\ د س$

الحل

٤) $\int_{0}^{٢} \sqrt{٤س + ١}\ د س = \int_{0}^{٢} (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\ د س$

$= \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢} + ١}}{٤ \times (\frac{١}{٢} + ١)} \right]_{0}^{٢} = \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} \right]_{0}^{٢}$

$= \left[\frac{\sqrt{(٤س + ١)^{٣}}}{٦} \right]_{0}^{٢}$

$= \frac{١}{٦} \left[\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right]$

$= \frac{١}{٦} (\sqrt{٩^{٣}} - \sqrt{١^{٣}})$

$\frac{1}{6}(27-1)$

$\frac{1}{6} \times 26 = \frac{13}{3}$

ب) $\int_{-1}^{0} 3x^2 (x^3-1)^3 \, dx =$ صفر

جـ) $\int_{0}^{1} x \sqrt{x^4-1} \, dx =$

$\int_{0}^{1} x (x^4-1)^{\frac{1}{2}} \, dx$

$u = x^4 - 1 \Leftarrow \frac{du}{dx} = 4x \Leftarrow dx = \frac{du}{4x}$

$\int_{0}^{1} x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{4x} = \int_{0}^{1} u^{\frac{1}{2}} du$

$\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{1} = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} \right]_{0}^{1}$

$\frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x^4-1)^4} \right]_{0}^{1} = \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{(1^4-1)^4} - \sqrt[3]{(0^4-1)^4} \right)$

$\frac{3}{4}(\sqrt{16}^3 - \sqrt{0}^3)$

$\frac{3}{4}(1-0)$

$\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$

د) $\int_1^2 \frac{3-2س}{(ع-3ى)^2}\,دس = \int_1^2 (3-2ى)(ع-3ى)^{-2}\,.\,دى$

$ص = ع-3ى \Leftarrow \frac{دص}{دى} = -3 \Leftarrow دى = \frac{دص}{-3}$

$= \int_1^2 (3-2ى)\,ص^{-2}\,\frac{دص}{-3} = -\frac{1}{3}\int_1^2 (3-2ى)\,ص^{-2}\,دص$ (١)

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{ص^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^2 = -\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{ص}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{ع-3ى}\right]_1^2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{ع-6} - \frac{1}{ع-3}\right)$

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-2} - \frac{1}{-1}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{3}$

---

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-2}^{3} 3س^2\,ق'(س^3)\,دس$

الحل

$ص = س^3 \Leftarrow \frac{دص}{دى} = 3ى^2 \Leftarrow دس = \frac{دص}{3ى^2}$

$\int_{-2}^{3} 3ى^2\,هـ'(ص)\,\frac{دص}{3ى^2} = \int_{-2}^{3} هـ'(ص)\,.\,دص$

$= \left[هـ(ص)\right]_{-2}^{3} = \left[هـ(س^3)\right]_{-2}^{3}$

$هـ(3^3) - هـ((-2)^3) = هـ(27) - هـ(-8) = -6 - 5$

$= -11$

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢} ق(س)\,ﻫس = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢}+١)\,ﻫس$

الحل

$ص = س^{٣}+١ \Leftarrow \frac{ﻫص}{ﻫس} = ٣س^{٢} \Leftarrow ﻫص = ٣س^{٢}\,ﻫس$

$\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(ص)\,ﻫس = \int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(ص)\,\frac{ﻫص}{٣س^{٢}} = \int_{-١}^{٢} \frac{٨}{٣}\,ق(ص)\,ﻫص$

عندما $س = -١ \leftarrow ص = (-١)^{٣}+١ = ٢$

عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٢^{٣}+١ = ٩$

$\int_{٢}^{٩} \frac{٨}{٣}\,ق(ص)\,ﻫص = \frac{٨}{٣}\int_{٢}^{٩} ق(ص)\,ﻫص = \frac{٨}{٣}\times(-٣) = -٨$

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤} ٢س\sqrt{س^{٢}+٩}\,ﻫس$

الحل

$\int_{٠}^{٤} ﻫس\,(س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\,ﻫس$

$ص = س^{٢}+٩ \Leftarrow \frac{ﻫص}{ﻫس} = ٢س \Leftarrow ﻫص = ٢س\,ﻫس$

$\frac{ﻫص}{ﻫس} = ﻫس$

$\int_{٠}^{٤} ٢س\cdot ص^{\frac{١}{٢}}\,\frac{ﻫص}{ﻫس} = \int_{٠}^{٤} ص^{\frac{١}{٢}}\,ﻫص = \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\right]_{٠}^{٤} = \left[\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}}\right)$

$\frac{٢}{٣}\left(٥^{٣}-٣^{٣}\right) = \frac{٢}{٣}(١٢٥-٢٧)$

$= \frac{٢}{٣}\times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$