

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$ (ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

(ج) $\int (2s-2s^3) \sqrt{(s-2)^2} ds$ (د) $\int \frac{9-s^3}{(s^2-2s)^2} ds$

الحل

(أ) $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص = $s-2 \Rightarrow ds = 1 ds$

$\int (1-2s)(s-2)^4 ds = \int (1-2(s-2)) (s-2)^4 ds$

$= \int (1-2s+4) (s-2)^4 ds = \int (5-2s) (s-2)^4 ds$

(ب) $\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds$

ص = $2-2s \Rightarrow ds = -1 ds$

$\int 6s^2 \sqrt{(2-2s)^2} ds = \int 6s^2 (2-2s) ds$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \sqrt[3]{u} = p + \frac{u^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{3}}$$

$$p + \sqrt[3]{(2-3x^2)} = p + \frac{u^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{3}}$$

$$u = 2 - 3x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -6x$$

$$\cdot dx = \frac{-du}{6}$$

$$\int \frac{-du}{6} = -\frac{1}{6}u + C$$

$$= -\frac{1}{6}(2-3x^2) + C$$

$$= -\frac{1}{6}(2-3x^2) + C$$

$$\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$$

$$u = x^2 - 6 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\cdot dx = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{9-x^2}{2(x^2-6)^2} dx$$

$$= \frac{9-x^2}{2(x^2-6)^2} dx$$

$$p + \frac{u^{-1/2}}{-1/2} = p + \frac{u^{1/2}}{1/2}$$

$$p + \frac{u^{-3/2}}{-3/2} = p + \frac{u^{-1/2}}{3/2}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$
 (ب) $\int (1-s)(1-2s^2-4s+1) ds$
 (ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds$
 (د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-4s+1) ds = \int (1-s)(2-2s^2-4s) ds$
 $= \int (2-2s^2-4s+2s^3+4s^2) ds = 2s - \frac{2}{3}s^3 - 2s^2 + \frac{2}{4}s^4 + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$
 $= \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds = \frac{2}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

(أ) $\int \sqrt{2-s} ds = \int (2-s)^{1/2} ds = \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(ب) $\int (1-s)(1-2s^2-4s+1) ds = \int (1-s)(2-2s^2-4s) ds$
 $= \int (2-2s^2-4s+2s^3+4s^2) ds = 2s - \frac{2}{3}s^3 - 2s^2 + \frac{2}{4}s^4 + C$

(ج) $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د) $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds = \frac{2}{3} (1+s^4)^{3/2} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب) $\int_1^2 s^3(s^2-1) ds$

ج) $\int_1^2 s^2 \sqrt{s^2-1} ds$

د) $\int_1^2 \frac{s^2-3}{(s^3-2)s} ds$

الحل

أ) $\int \sqrt{4s+1} ds = \int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds$

$$\int (4s+1)^{\frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{4 \times \frac{1}{2}} ds = \int \frac{(4s+1)^{\frac{1}{2}}}{2} ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{4s+1} ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{3} (4s+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{2x-1}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{2x-1} dx = \text{ممنوع}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{2x-1} dx = \text{ممنوع}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{2x-1} dx = \text{ممنوع}$$

$$\text{ممنوع} = \frac{2}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} = \frac{2}{x}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{2x-1} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{x} dx = \text{ممنوع}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{2x-1} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{x} dx = \text{ممنوع}$$

$$\frac{2}{3} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \frac{2}{3} \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \right)$$

$$\left(\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left(-1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{u} = \int_1^2 \frac{1}{1-u} = \int_1^2 \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)}$$

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$$

$$1 = A(1+u) + B(1-u)$$

$$1 = A + Au + B - Bu$$

$$1 = (A+B) + (A-B)u$$

$$1 = 1 + 0u$$

$$0 = A - B$$

$$A = B$$

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^3 \frac{1}{x^3} dx$ (٣س) كس

الحل

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{1}{u^3} \Rightarrow \frac{1}{x^3} = \frac{1}{u^3}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^3} dx = \int_2^3 \frac{1}{u^3} dx = \int_2^3 \frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{u^2} du$$

$$\int_2^3 \frac{1}{u^5} du = \int_2^3 \frac{1}{u^5} du$$

$$0 - 6 = (8 - 1) - (27 - 1) = (8 - 1) - (27 - 1)$$

$$11 =$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

الحل

$$٨س = ٨(٢س - ١) \Leftrightarrow ٨س = ١٦س - ٨ \Leftrightarrow ٨ = ٨س - ٨س \Leftrightarrow ٨ = ٨(س - ١) \Leftrightarrow ١ = س - ١ \Leftrightarrow س = ١ + ١ = ٢$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨(٢س - ١) دس = ٤ \int_{-1}^2 (٤س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow ٤س - ١ = ٨ - ١ = ٧$$

$$\text{عند } س = -١ \Rightarrow ٤س - ١ = -٤ - ١ = -٥$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = ٤ \int_{-1}^2 (٤س - ١) دس = ٤ \left[٢س٢ - س \right]_{-1}^2 = ٤(٨ - ٢ - ٢ + ١) = ٤(٥) = ٢٠$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

الحل

$$\int_0^2 ٢س \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 (٢س - ٩ + ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \int_0^2 (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس + \int_0^2 ٩ \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \int_0^2 (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس + ٩ \int_0^2 \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$\int_0^2 (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$= \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس = \int_0^2 \frac{١ + \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} (٢س - ٩) \sqrt{٩ + ٢س} دس$$

$$\left(\sqrt[٣]{٩ + ٢س} - \sqrt[٣]{٩ + ٢س} \right) \frac{٢س}{٣}$$

$$\left(\sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{١٥} \right) \frac{٢س}{٣} = \left(\sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{١٥} \right) \frac{٢س}{٣} = \frac{١٩٧}{٣}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف