

## إجابات أسئلة الدرس

### التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$  (ب)  $\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds$

(ج)  $\int (2s-3)(s^2-2s) ds$  (د)  $\int \frac{s^3-9}{(s^2-6)^2} ds$

### الحل

(أ)  $\int (1-2s)(s-2)^4 ds$

ص =  $s-2 \Rightarrow ds = ds$   $\Rightarrow 1-2s = 1-2(v+2) = -3-2v$

$\int (-3-2v)v^4 dv = \int (-3v^4 - 2v^5) dv = -\frac{3v^5}{5} - \frac{2v^6}{6} + C = -\frac{3(s-2)^5}{5} - \frac{(s-2)^6}{3} + C$

(ب)  $\int 6s^2 \sqrt{(2-s)^2} ds = \int 6s^2 |2-s| ds$

ص =  $2-s \Rightarrow ds = -ds$   $\Rightarrow 6s^2 = 6(2-v)^2 = 6(4-4v+v^2) = 24-24v+6v^2$

$\int (24-24v+6v^2)(-dv) = \int (-24+24v-6v^2) dv = -24v + 12v^2 - 2v^3 + C = -24(2-s) + 12(2-s)^2 - 2(2-s)^3 + C$

(ج)  $\int (2s-3)(s^2-2s) ds = \int (2s^3-4s^2-3s^2+6s) ds = \int (2s^3-7s^2+6s) ds = \frac{2s^4}{4} - \frac{7s^3}{3} + \frac{6s^2}{2} + C = \frac{s^4}{2} - \frac{7s^3}{3} + 3s^2 + C$

$$p + \frac{u}{\sqrt{u}} = p + \frac{u^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{\sqrt{u}}{2} =$$

$$p + \frac{\sqrt{2-3x}}{2} =$$

(ج)  $\int (2-3x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2-3x}{-3} \cdot \frac{2}{3} + C$

$$ص = \frac{2-3x}{-3} \Rightarrow 3x - 2 = \frac{3}{ص}$$

$$\cdot 3ص = \frac{3}{ص - 2}$$

$$\frac{3ص}{ص-2} = \frac{3}{ص-2}$$

$$\int \frac{3}{ص-2} = 3 \ln |ص-2| + C$$

$$= 3 \ln |2-3x| + C$$

(د)  $\int \frac{9-x^2}{(x^2-6)^2} dx$

$$ص = x^2 - 6 \Rightarrow 2x = \frac{3}{ص} \Rightarrow x = \frac{3}{2ص}$$

$$\cdot 2ص = \frac{3}{ص-6}$$

$$= \frac{3ص}{ص-6} \times \frac{9-x^2}{ص^2}$$

$$= \frac{3ص}{(ص-6)^2} \times \frac{3}{ص} \times (3-x)^2$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{u}} = p + \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$p + \frac{2}{\sqrt{u}} = p + \frac{2}{2\sqrt{u}}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds$   
 (ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds$   
 (ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds$   
 (د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds$

**الحل**

(أ)  $\int \sqrt{(2-s)^2} ds = \int (2-s) ds = 2s - \frac{1}{2}s^2 + C$

(ب)  $\int (1-s)(1-2s^2-s^4) ds = \int (1-s-2s^3+s^4-2s^5+s^5) ds = \int (1-s-2s^3) ds = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{2}{4}s^4 + C = s - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^4 + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = 2 \int (2-s)^{1/2} ds = 2 \cdot \frac{2}{3} (2-s)^{3/2} + C = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \int 2s^2 (1+s^4)^{1/2} ds$   
 Let  $u = 1+s^4$ , then  $du = 4s^3 ds$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{s} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{u} + C = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$   
 $\int 2 \sqrt{2-s} ds = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \sqrt{1+s^4} + C$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \sqrt{1+s^4} + C$

(ج)  $\int 2 \sqrt{2-s} ds = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$   
 $\int 2 \sqrt{2-s} ds = \frac{4}{3} (2-s)^{3/2} + C$

(د)  $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \sqrt{1+s^4} + C$   
 $\int 2s^2 \sqrt{1+s^4} ds = \sqrt{1+s^4} + C$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ)  $\int \sqrt{4s+1} ds$

ب)  $\int \frac{3s^2(1-s)^2}{s^3} ds$

ج)  $\int \frac{2s^2}{\sqrt{s^2-1}} ds$

د)  $\int \frac{s^2-3}{s^2(s^3-2)} ds$

**الحل**

أ)  $\int \sqrt{4s+1} ds = \int \sqrt{4(s+\frac{1}{4})} ds$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{4}}{4 \times (s+\frac{1}{4})} ds = \int \frac{(1+\frac{1}{4})}{4 \times (s+\frac{1}{4})} ds$$

$$= \int \frac{\sqrt{4(s+\frac{1}{4})}}{4} ds$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \sqrt{4(s+\frac{1}{4})} - \frac{1}{\sqrt{4(s+\frac{1}{4})}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{4} \left( \sqrt{4s+1} - \frac{1}{\sqrt{4s+1}} \right) + C$$

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

منهاجي  
متعة التعليم الهادف

$$\frac{1}{x} (1-2x) = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x}$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2) dx = \text{مساحة}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1-x^2 = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow x = \frac{dx}{1-x^2} \Leftrightarrow dx = \frac{dx}{x} = x$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{dx}{x} \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \sqrt{1-x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{2}{3} \left[ \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| \right]_{-1}^1$$

$$\left( \sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{1} \right) \frac{x}{2}$$

$$\left( -1 - 1 \right) \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} = 1 \times \frac{x}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 6)^2} dx$$

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(3 - u)^2} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{3 - u} = \int_1^2 \frac{1}{1 - u} = \int_1^2 \frac{1}{1 + u}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 3 - 6} - \frac{1}{2 \times 3 - 6} = \int_1^2 \frac{1}{x^3 - 6}$$

$$\text{مفر} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx$

**الحل**

$$u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow 3 - u = \frac{x^3}{3} \Rightarrow x^3 - 6 = 3 - u$$

$$\int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx = \int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx$$

$$\int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx = \int_2^3 \frac{3^x - 2^x}{3^x - 2^x} dx$$

$$0 - 6 - = (8 -) 5 - (27) 6 = (3 -) 5 - (2) 6$$

$$11 - =$$

(٥) إذا علمت أن  $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:  $\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس$

**الحل**

$$٥س = س٢ + ١ \Leftrightarrow س٢ = ٥س - ١ \Leftrightarrow دس = \frac{٥س}{٢س} = \frac{٥}{٢}$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨س ق(٥س - ١) دس$$

$$\text{عند } س = -١ \Rightarrow س٢ = ٥(-١) - ١ = -٦ \Rightarrow ٢ = ١ + (-٦)$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow س٢ = ٥(٢) - ١ = ٩ \Rightarrow ٥ = ١ + ٩$$

$$\int_{-1}^2 ٨س ق(س٢ + ١) دس = \int_{-٦}^9 ٤ دس = ٤(٩ - (-٦)) = ٤(١٥) = ٦٠$$

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.  
جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^1 ٢س \sqrt{٩ + ٤س} دس$$

**الحل**

$$\int_0^1 ٢س \sqrt{٩ + ٤س} دس = \int_0^1 ٢س \sqrt{٤س + ٩} دس$$

$$\Leftrightarrow ٤س = ٤س + ٩ \Leftrightarrow دس = \frac{٤س}{٨س} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{عند } س = ٠ \Rightarrow ٤س = ٩ \Rightarrow ٣ = \sqrt{٩ + ٤س}$$

$$\int_0^1 ٢س \sqrt{٤س + ٩} دس = \int_3^5 \frac{١}{٢} \sqrt{٤س + ٩} د(٤س + ٩) = \int_3^5 \frac{١}{٢} \sqrt{٤س + ٩} \cdot ٤ دس = ٢ \int_3^5 \sqrt{٤س + ٩} دس$$

$$= ٢ \left[ \frac{٢}{٣} (٤س + ٩)^{3/2} \right]_3^5$$

$$= \frac{٢}{3} \left( \frac{٢}{3} (٤(٥) + ٩)^{3/2} - \frac{٢}{3} (٤(٠) + ٩)^{3/2} \right) = \frac{٢}{3} \left( \frac{٢}{3} (٢٧ - ١٣٥) \right) = \frac{٢}{3} \left( \frac{٢}{3} (-١٠٨) \right) = \frac{٢}{3} \cdot \frac{٢}{3} \cdot (-١٠٨) = \frac{٤}{9} \cdot (-١٠٨) = -٤٨$$