إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١ - ٢\text{س})(\text{س} - \text{س}^٢)^٤ \, \text{ءس}$ ب) $\int ٦\text{س}^٢ \sqrt[٥]{(٢\text{س}^٣ - ٢)^٢} \, \text{ءس}$

جـ) $\int (٢\text{س} - ٣\text{س}^٢) \, \text{قا}^٢(\text{س}^٢ - \text{س}^٣) \, \text{ءس}$ د) $\int \frac{٣\text{س} - ٩}{(\text{س}^٢ - ٦\text{س})^٢} \, \text{ءس}$

الحل

أ) $\int (١ - ٢\text{س})(\text{س} - \text{س}^٢)^٤ \, \text{ءس}$.

$\text{ص} = \text{س} - \text{س}^٢ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ - ٢\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{١ - ٢\text{س}} = \text{ءس}$

$\int \cancel{(١ - ٢\text{س})} \, \text{ص}^٤ \, \frac{\text{ءص}}{\cancel{١ - ٢\text{س}}} = \int \text{ص}^٤ \, \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^٥}{٥} + \text{جـ} = \frac{(\text{س} - \text{س}^٢)^٥}{٥} + \text{جـ}$

ب) $\int ٦\text{س}^٢ \sqrt[٥]{(٢\text{س}^٣ - ٢)^٢} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^٣ - ٢ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}^٢ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{٦\text{س}^٢} = \text{ءس}$

$\int \cancel{٦\text{س}^٢} \sqrt[٥]{\text{ص}^٢} \, \frac{\text{ءص}}{\cancel{٦\text{س}^٢}} = \int \text{ص}^{\frac{٢}{٥}} \, \text{ءص}$

$$\frac{ص^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + جـ = \frac{ص^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + جـ$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{ص^{7}} + جـ$$

$$= \frac{5}{7}\sqrt[5]{(2س^{3}-2)^{7}} + جـ$$

جـ) $\int (2س - 3س^{2})\,قا^{2}(س^{3} - س^{2})\,دس$

$ص = س^{3} - س^{2} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 3س^{2} - 2س$

$\frac{دص}{3س^{2}-2س} = دس$.

$$\int \cancel{(2س - 3س^{2})}^{(-1)}\,قا^{2}ص\,\frac{دص}{\cancel{3س^{2}-2س}}$$

$$\int -قا^{2}ص \,.\, دص = -ظاص + جـ$$

$$= -ظا(س^{3}-س^{2}) + جـ$$

د) $\int \frac{3س - 9}{(س^{2} - 6س)^{2}}\,دس$

$ص = س^{2} - 6س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 2س - 6 \Leftarrow$

$\frac{دص}{2س-6} = دس$.

$$= \int \frac{3س-9}{ص^{2}} \times \frac{دص}{2س-6}$$

$$= \int 3\cancel{(س-3)} \times ص^{-2} \times \frac{دص}{2\cancel{(س-3)}}$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{ص^{-2+1}}{-2+1} + جـ = \frac{3}{2}\,\frac{ص^{-1}}{-1} + جـ$$

$$\frac{-3}{2ص} + جـ = \frac{-3}{2(س^{2}-6س)} + جـ$$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س} - ٢)^{٢}}\ \text{ءس}$ ب) $\int (\text{س} - ١)(\text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٥}\ \text{ءس}$

جـ) $\int ٢\ \text{قا}^{٢}(٢ - \text{س})\ \text{ءس}$ د) $\int \text{٢س}^{٣}\ \text{جا}(\text{س}^{٤} + ١)\ \text{ءس}$

الحل

أ) $\int \sqrt[3]{(\text{٣س} - ٢)^{٢}}\ \text{ءس} = \int (\text{٣س} - ٢)^{\frac{٢}{٣}}\ \text{ءس} = \dfrac{(\text{٣س} - ٢)^{\frac{٢}{٣} + ١}}{(\frac{٢}{٣} + ١) \times ٣} + \text{جـ}$

$= \dfrac{(\text{٣س} - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\cancel{٣} \times \cancel{\frac{٥}{٣}}} + \text{جـ} = \dfrac{١}{٥} \sqrt[3]{(\text{٣س} - ٢)^{٥}} + \text{جـ}$

ب) $\int (\text{س} - ١)(\text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٥}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١ \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س} - ٤$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س} - ٤} = \text{ءس} \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{٤(\text{س} - ١)} = \text{ءس}$

$\int \cancel{(\text{س} - ١)}\ \text{ص}^{٥} \times \dfrac{\text{ءص}}{٤\cancel{(\text{س} - ١)}} = \dfrac{١}{٤} \int \text{ص}^{٥}\ \text{ءص}$

$= \dfrac{\text{ص}^{٦}}{٦ \times ٤} + \text{جـ} = \dfrac{(\text{٢س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٦}}{٢٤} + \text{جـ}$

جـ) $\int ٢\ \text{قا}^{٢}(٢ - \text{س})\ \text{ءس} =$

$\dfrac{٢\ \text{ظا}(٢ - \text{س})}{-١} + \text{جـ}$

$-٢\ \text{ظا}(٢ - \text{س}) + \text{جـ}$

د) $\int \text{٢س}^{٣}\ \text{جا}(\text{س}^{٤} + ١)\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٤} + ١ \Leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{٣} \Leftarrow$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{٤س}^{٣}} = \text{ءس}$

$\int ٢\cancel{\text{س}^{٣}}\ \text{جا ص}\ \dfrac{\text{ءص}}{٤\cancel{\text{س}^{٣}}} =$

$\int \dfrac{١}{٢}\ \text{جا ص ءص} = -\dfrac{١}{٢}\ \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\dfrac{١}{٢}\ \text{جتا}(\text{س}^{٤} + ١) + \text{جـ}$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س + ١}\ دس$

ب) $\int_{-١}^{-١} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣}\ دس$

جـ) $\int_{١}^{٠} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\ دس$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\ دس$

الحل

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س+١}\ دس = \int_{٠}^{٢} (٤س+١)^{\frac{١}{٢}} \cdot دس$

$$\left[\frac{(٤س+١)^{\frac{١}{٢}+١}}{٤ \times (\frac{١}{٢}+١)} \right]_{٠}^{٢} = \left[\frac{(٤س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٢}$$

$$\left[\frac{\sqrt{(٤س+١)^{٣}}}{٦} \right]_{٠}^{٢}$$

$$\frac{١}{٦}\left[\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right]$$

$$\frac{١}{٦}\left(\sqrt{٩}^{\,٣} - \sqrt{١}^{\,٣} \right)$$

$$\frac{1}{6}(27-1)$$

$$\frac{1}{6}\times 26 = \frac{13}{3}$$

ب) $\int_{-1}^{1} 3\text{س}^{2}(\text{س}^{3}-1)^{3}\,\text{د}\text{س} = \text{صفر}$

جـ) $\int_{1}^{0} 2\text{س}\sqrt[3]{\text{س}^{2}-1}\,.\,\text{د}\text{س} =$

$$\int_{1}^{0} 2\text{س}(\text{س}^{2}-1)^{\frac{1}{3}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{2}-1 \Leftarrow \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{د}\text{ص}}{2\text{س}} = \text{د}\text{س}$$

$$\int_{1}^{0} \cancel{2\text{س}}\,\text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\frac{\text{د}\text{ص}}{\cancel{2\text{س}}} = \int_{1}^{0} \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{د}\text{ص}$$

$$\left[\frac{\text{ص}^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_{1}^{0} = \left[\frac{\text{ص}^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{1}^{0}$$

$$\frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{(\text{س}^{2}-1)^{4}}\right]_{1}^{0} = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{(0-1)^{4}} - \sqrt[3]{(1-1)^{4}}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١} - \sqrt[٣]{٠}\right)$$

$$\frac{٣}{٤}\left(١ - ٠\right)$$

$$\frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$$

د) $$\int_{١}^{٢} \frac{٢\text{س} - ٣}{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{٢}}\, \text{دس} = \int_{١}^{٢} (٢\text{س} - ٣)(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{-٢} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} - ٣ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س} - ٣}$$

$$\int_{١}^{٢} \cancel{(٢\text{س} - ٣)}\, \text{ص}^{-٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س} - ٣}} = \int_{١}^{٢} \text{ص}^{-٢}\, \text{دص} =$$

$$\left[\frac{-\text{ص}^{-٢+١}}{-٢+١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{-\text{ص}^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢} = \left[\frac{١}{\text{ص}}\right]_{١}^{٢}$$

$$\left[\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}\right]_{١}^{٢} = \frac{١}{٢^{٢} - ٣ \times ٢} - \frac{١}{١^{٢} - ٣ \times ١} = \frac{١}{-٢} - \frac{١}{-٢}$$

$$= \frac{-١}{٢} + \frac{١}{٢} = \text{صفر}$$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣} ٣\text{س}^{٢}\, \text{ق}'(\text{س}^{٣})\, \text{دس}$

الحل

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$\int_{-٢}^{٣} \cancel{٣\text{س}^{٢}}\, \text{ق}'(\text{ص})\, \frac{\text{دص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}} = \int_{-٢}^{٣} \text{ق}'(\text{ص}) \cdot \text{دص} =$$

$$\text{ق}(\text{ص})\Big]_{-٢}^{٣} = \text{ق}(\text{س}^{٣})\Big]_{-٢}^{٣}$$

$$\text{ق}(٣^{٣}) - \text{ق}((-٢)^{٣}) = \text{ق}(٢٧) - \text{ق}(-٨) = -٦ - ٥$$

$$= -١١$$

٥) إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢} \text{ق(س) ءس} = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{١-}^{٢} \text{٨س ق(س}^{٢} + ١\text{) ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \text{ءس}$

$\int_{١-}^{٢} ٨\cancel{\text{س}}\ \text{ق(ص)} \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}} = \int_{١-}^{٢} ٤\ \text{ق(ص) ءص}$

عندما $\text{س} = ١- \leftarrow \text{ص} = (١-)^{٢} + ١ = ٢$

عندما $\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = ٢^{٢} + ١ = ٥$

$\int_{٢}^{٥} ٤\ \text{ق(ص) ءص} = ٤ \int_{٢}^{٥} \text{ق(ص) ءص} = ٤ \times ٣- = ١٢-$

---

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{٠}^{٤} ٢\text{س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}\ \text{ءس}$

الحل

$\int_{٠}^{٤} ٢\text{س} (\text{س}^{٢} + ٩)^{\frac{١}{٢}} . \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \Leftarrow$

$\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \text{ءس} .$

$\int_{٠}^{٤} \cancel{٢\text{س}} . \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}} = \int_{٠}^{٤} \text{ص}^{\frac{١}{٢}} . \text{ءص} = \left[\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} \right]_{٠}^{٤} = \left[\frac{٢}{٣} \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣} \left[\sqrt{(\text{س}^{٢} + ٩)^{٣}} \right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣} \left(\sqrt{(٤^{٢} + ٩)^{٣}} - \sqrt{(٠ + ٩)^{٣}} \right)$

$\frac{٢}{٣} (٥^{٣} - ٣^{٣}) = \frac{٢}{٣} (١٢٥ - ٢٧)$

$= \frac{٢}{٣} \times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$