

أُتدرب وأحل المسائل

الأسئلة (1 - 20)

الاشتقاق

x أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة المعطاة:

(1) $f(x) = |x-5|$, $x=5$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(5+h)-5| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

$f'(5)$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين، فإن f غير موجودة، أي أنّ f غير قابل للاشتقاق عند $x = 5$

(2) $f(x) = x^2/5$, $x=0$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h)^2/5 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{5} \\ &= \frac{0}{5} = 0 \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{5} = 0 \end{aligned}$$

$f'(0)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 0$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$, $x=1$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 2 - 2h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 2) = -2 \end{aligned}$$

$f'(1)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 1$

(4) $f(x) = 3x$, $x=4$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4+h) - 3 \cdot 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12 + 3h - 12}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned}$$

$x = 4$ قابل للاشتقاق عند f غير موجودة، إذن $f'(4)$

(5) $f(x) = (x-6)^2/3$, $x=6$

$$f'(6) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6+h-6)^2/3 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2/3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{3} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13 + 6h - 13}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$$

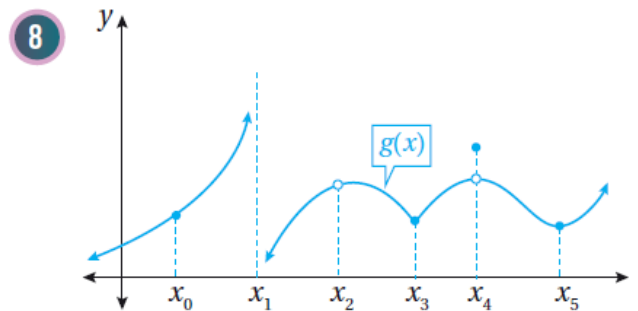
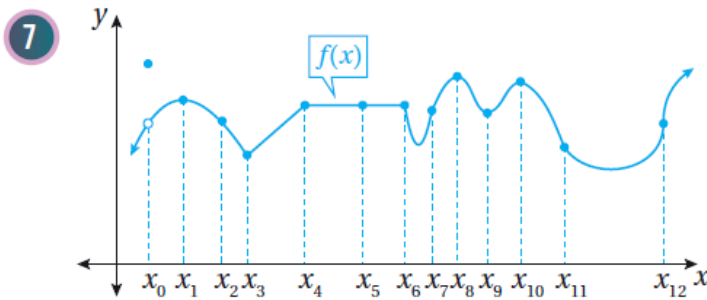
$x = 6$ غير قابل للاشتقاق عند f غير موجودة، إذن $f'(6)$ غير

$$(6) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h+1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{h}\right) = \infty$$

$f'(4)$ غير موجودة، إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = 4$

x أحد قيم للنقاط التي لا يكون عندها كلٌّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق، مبرراً إجابتي:



(7) الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3, x = x_4, x = x_6$ ؛ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط.

$x = x_0$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ لأنه غير متصل عندها،

$x = x_{12}$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ نظراً لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

(8) الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ ؛ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة.

$x = x_0$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ لأنه غير متصل عندها،

$x = x_1, x = x_2, x = x_4$ وهو غير قابل للاشتقاق عندما؛ لأنه غير متصل عندها.

x أحد قيمة (قيم) التي لا يكون عندها كلٌّ اقتران ممّا يأتي قابلاً للاشتقاق:

$$(9) f(x) = x^2 - 8x - 5$$

f اقتران نسبي منحناه متصل وأملس عند جميع نقاطه باستثناء أصفار مقامه،

$$x^2 - 8x - 5 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 5 \text{ or } x = -1$$

f غير متصل عند $x = -1$ ، $x = 5$ إذن غير قابل للاشتقاق عندها.

$$(10) f(x) = 3x - 63 + 5$$

$$f(x) = 3x - 63 \quad f'(x) = 13(3x - 6) - 23(3) = 1(3x - 6)23$$

غير قابل للاشتقاق f الحقيقية عدا أصفار مقامها، إذن x موجودة عند جميع قيم $f'(x)$ عند $x = 2$

$$(11) f(x) = |x^2 - 9|$$

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} 9 - x^2, & -3 < x < 3 \\ x^2 - 9, & x \leq -3 \text{ or } x \geq 3 \end{cases}$$

$x = 3$ نبحث قابلية الاشتقاق عند $x = -3$ و $x = 3$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(3+h)^2 - 9| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|6h + h^2|}{h} \\ hf + '(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \\ f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(-3+h)^2 - 9| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|6h - h^2|}{h} \\ hf + '(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - h) = 6 \end{aligned}$$

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن $f'(3)$ غير موجودة أي أن غير قابل للاشتقاق عند $x = 3$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(-3+h)^2 - 9| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|6h - h^2|}{h} \\ hf + '(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - h) = 6 \end{aligned}$$

بما أن النهايتين من اليمين واليسار غير متساويتين فإن $f'(-3)$ غير موجودة أي أن غير قابل للاشتقاق عند $x = -3$

إذن f غير قابل للاشتقاق عند $x = -3$ ، $x = 3$

(12) إذا كان: $f(x)=x|x|$ ، فأثبت أن $f'(0)$ موجودة.

$$f(x)=x|x|f'(0)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=\begin{cases} -h, & h < 0 \\ h, & h \geq 0 \end{cases} \\ f'(0)=\lim_{h \rightarrow 0} |h|=\lim_{h \rightarrow 0} (-h)=0$$

$f'(0)$ بما أن النهايتين من اليمين واليسار متساويتان، إذن (موجودة).

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

(13) $f(x)=2\sin x - e^x$

$$f'(x)=2\cos x - e^x$$

(14) $f(x)=\ln x^4 - \pi \cos x$

$$f'(x)=14x + \pi \sin x$$

(15) $f(x)=\ln(1+x^3)+x^4$

$$f(x)=\ln(1+x^3)+x^4=\ln 1 + \ln x^3 + x^4 = -3\ln x + x^4 \quad f'(x) = -3x + 4x^3$$

(16) $f(x)=e^{x+1} + 1$

$$f(x)=e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1 \quad f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$$

(17) $f(x)=e^x + xe$

$$f'(x)=e^x + e \times x - 1$$

(18) $f(x)=\ln(10x^n)$

$$f(x)=\ln(10x^n)=\ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n \ln x \quad f'(x) = -n(1/x) = -n/x$$

إذا كان: $f(x)=\sin(x+12e)$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, 12e\pi)$.

$$f(x)=\cos x + 12e^x$$

ميل المماس عند النقطة $(\pi, 12e\pi)$:

$$f'(\pi) = \cos \pi + 12e\pi = -1 + 12e\pi$$

معادلة المماس عند النقطة $(\pi, 12e\pi)$:

$$y - 12e\pi = (-1 + 12e\pi)(x - \pi) \Rightarrow y = (-1 + 12e\pi)x + \pi - \pi^2 e\pi + 12e\pi$$

(20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, 12e\pi)$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $(\pi, 12e\pi)$ هو $-1 + 12e\pi$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو:

$$-1 - 1 + 12e\pi = -2 - 2 + e\pi = 22 - e\pi$$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - 12e\pi = 22 - e\pi(x - \pi) \Rightarrow y = 22 - e\pi x - 2\pi^2 - e\pi + 12e\pi$$