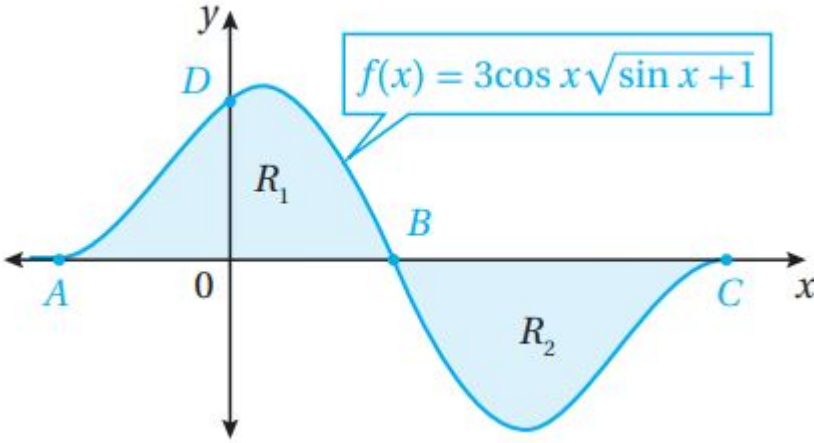


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجب
عن الأسئلة الآتية تباعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x=\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x=3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \text{حيث } x=0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow 3\cos x = 3 \\ \text{حيث } x=3\pi/2 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow 3\cos x = -3$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x = \pi/2, x = 3\pi/2$ ، بوضع $n = 0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\pi/2$ ، بوضع $n = -1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياتها هما: $(0, 3) = (D(0, f(0)))$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx \\ \text{نضع } u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx \\ \text{عند } x = -\pi/2 \Rightarrow u = 0 \\ \text{عند } x = \pi/2 \Rightarrow u = 2 \\ \text{إذن } A = \int_0^2 3\sqrt{u} du = 3 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^2 = 2 \cdot (2^{3/2} - 0) = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} (3\cos x + \sin x) dx = \int_0^2 (3\sqrt{u} + \frac{1}{2}u) du = 42 \Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

(43) تحدد: أجد قيمة: $\int_1^{16} (x^3 + 1) dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} = \frac{du}{3(u-1)^{2/3}}$$

$$\int_1^{16} (x^3 + 1) dx = \int_1^{16} (u - 1) \frac{du}{3(u-1)^{2/3}} = \frac{1}{3} \int_1^{16} (u-1)^{1/3} du = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} (u-1)^{4/3} \right]_1^{16} = 9 \left[\frac{3}{4} (15)^{4/3} - \frac{3}{4} (0)^{4/3} \right] = \frac{27}{4} (15)^{4/3}$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$.

$$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_{\pi}^{\pi/2} f(\sin(\pi - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$.

bbb

تحدد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(46) $\int_1^e (\ln x) dx$

bbb

(47) $\int_0^{\pi/2} (\cos x \sin x - \cos^2 x) dx$

bbb

(48) $\int_0^1 (2x + 1) \sin x dx$

bbb