

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int \sqrt{x^2+4} \, dx$

$$u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \int \sqrt{x^2+4} \, dx = \int \frac{u \, du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{u \, du}{\sqrt{u-4}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{u \, du}{\sqrt{u-4}} = \frac{1}{2} \int \frac{(u-4)+4}{\sqrt{u-4}} \, du = \frac{1}{2} \left(\int \sqrt{u-4} \, du + \int \frac{4}{\sqrt{u-4}} \, du \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} (u-4)^{3/2} + 8 \sqrt{u-4} \right) + C = \frac{1}{3} (x^2+4)^{3/2} + 4 \sqrt{x^2+4} + C$$

(2) $\int (1 - \cos x)^2 \sin x \, dx$

$$u = 1 - \cos x \Rightarrow du = \sin x \, dx \int (1 - \cos x)^2 \sin x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} (1 - \cos x)^3 + C$$

(3) $\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx = \int \csc^3 x \cos^2 x \, dx = \int \csc^3 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \csc^3 x \, dx - \int \csc x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \csc^3 x \, dx - \int \csc x \, dx = -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| - \ln |\csc x - \cot x| + C = -\frac{1}{2} \csc x \cot x - \ln |\csc x - \cot x| + C$$

(4) $\int x \sin x^2 \, dx$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \, dx \int x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

(5) $\int x^3 (x+2)^7 \, dx$

$$u = x+2 \Rightarrow dx = du, x = u-2 \int x^3 (x+2)^7 \, dx = \int (u-2)^3 u^7 \, du = \int (u^10 - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) \, du = \frac{1}{11} u^{11} - \frac{6}{10} u^{10} + \frac{12}{9} u^9 - \frac{8}{8} u^8 + C = \frac{1}{11} (x+2)^{11} - \frac{3}{5} (x+2)^{10} + \frac{4}{3} (x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

(6) $\int \ln x \, dx$

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(7) $\int e^{2x} dx$

$$u = x \Rightarrow du = dx = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \int e^{2x} dx = \int e^u \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

(8) $\int \sin(\ln 4x^2) x dx$

$$\int \sin(\ln 4x^2) x dx = \int \sin(2 \ln 2x) x dx \quad u = 2 \ln 2x \Rightarrow du = \frac{2}{x} dx \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$$

$$\int \sin(\ln 4x^2) x dx = \int \sin u \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} du = \frac{1}{4} \int \sin u du = -\frac{1}{4} \cos u + C = -\frac{1}{4} \cos(2 \ln 2x) + C = -\frac{1}{4} \cos(\ln 4x^2) + C$$

(9) $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du \int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u du$$

$$= \int \cos u \cos^2 u du = \int \cos u (1 - \sin^2 u) du \quad v = \sin u \Rightarrow dv = \cos u \Rightarrow \cos u dx = dv$$

$$\int \cos u (1 - \sin^2 u) du = \int (1 - v^2) dv = v - \frac{1}{3} v^3 + C = \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C = \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x \cos(\tan x) (1 - \sin^2(\tan x)) dx$$

$u = \sin(\tan x)$ وبتعويض واحد فقط هو .

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(10) $\int (208x^4 + 1) dx$

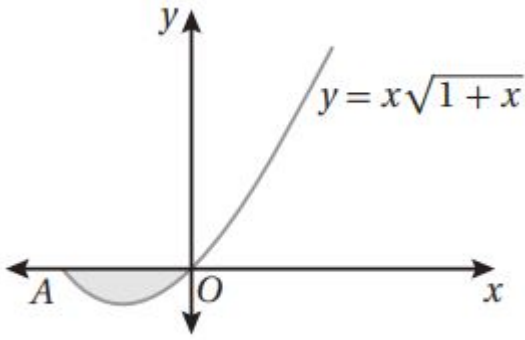
(11) $\int (x-1) dx$

(12) $\int (2x + \cos \frac{\pi}{2}) \sin x dx$

(13) $\int (x^3 + 1) dx$

(14) $\int (4x \cos \frac{20\pi}{4}) \tan x dx$

(15) $\int (15x \sin \frac{30\pi}{3}) \cos^2 x dx$



(16) يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{1+x}$.

أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$(x; (\pi/4, 0)) \quad f'(x) = 16 \sin 3x$$

$$(f'(x) = x^2 + 5; (2, 1)) \quad (18)$$

(19) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = -2t(1+t^2)^{3/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $4m$ ، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية.