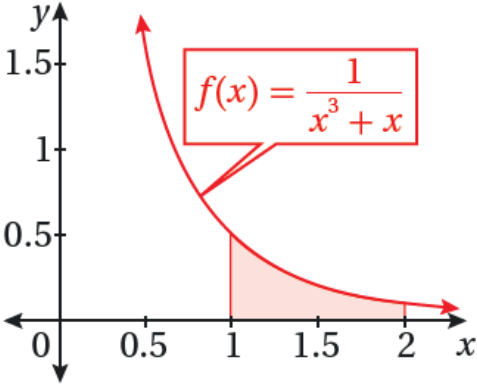


مسألة اليوم

التكامل بالكسور الجزئية

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$.



أجد مساحة المنطقة المظلمة منه.

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x} dx$$

لإيجاد قيمة هذا التكامل نجزيء المقدار إلى كسور جزئية يمكن إيجاد تكاملاتها بسهولة كما يأتي:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \Rightarrow 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x \quad x=0 \Rightarrow A = \frac{1}{1} = 1$$

$$x=1 \Rightarrow 1 = 2A + B + C \Rightarrow 1 = 2 + B + C \quad x=-1 \Rightarrow 1 = 2A + B - C \Rightarrow 1 = 2 + B - C$$

$$B = -1, C = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$$