

أتحقق من فهمي

التكامل بالأجزاء

التكامل بالأجزاء

أتحقق من فهمي صفحة (63):

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int x \sin x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int x^2 \ln u \, du = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x^3 \ln u - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{u} \, du \right) = \frac{1}{9} x^3 \ln u - \frac{1}{9} \int \frac{x^3}{u} \, du = \frac{1}{9} x^3 \ln u - \frac{1}{9} \int \frac{x^3}{x^3} \, dx = \frac{1}{9} x^3 \ln u - \frac{1}{9} \int 1 \, dx = \frac{1}{9} x^3 \ln u - \frac{1}{9} x + C = \frac{1}{9} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x + C$$

$$\int (2x^7 - 3x) \, dx$$

ملاحظة: يمكن حل هذه المسألة بطريقة التعويض $u = 7 - 3x$ أو $u = 7 - 3x$

وتالياً حلها بالأجزاء:

$$\int (2x^7 - 3x) \, dx = \int (2x^7 - 3x) \, dx = \frac{2}{8} x^8 - \frac{3}{2} x^2 + C = \frac{1}{4} x^8 - \frac{3}{2} x^2 + C$$

$$\int 3x e^{4x} \, dx$$

$$\int 3x e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} \int x e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \int \frac{1}{4} x^2 \cdot 4 e^{4x} \, dx \right) = \frac{3}{16} x^2 e^{4x} - \frac{3}{4} \int x e^{4x} \, dx = \frac{3}{16} x^2 e^{4x} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x} \, dx \right) = \frac{3}{16} x^2 e^{4x} - \frac{3}{16} x e^{4x} + \frac{3}{16} e^{4x} + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء

أتحقق من فهمي صفحة (64):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int x dx \quad (a) \int x^2 \sin x dx$$

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \sin x + C$$

$$\int x^3 e^{4x} dx \quad (b) \int x^3 e^{4x} dx$$

$$\int x^3 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \int 3x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^3 e^{4x} - \frac{3}{16} x^2 e^{4x} + \frac{3}{8} x e^{4x} - \frac{3}{32} e^{4x} + C$$

التكاملات الدورية

أتحقق من فهمي صفحة (66):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int x e^x dx \quad (a) \int x \sin x dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\int x dx \quad (b) \int \sec^3 x dx$$

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$x + \ln x \tan x dx = \sec x + \tan x \sec x \tan x + \sec x + \int \sec^2 x \tan x dx = \sec x + \tan x \sec x + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول

أتحقق من فهمي صفحة (67):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int (4x dx) \cos f$$

نفرض أن: $f(x) = x^4, g(x) = \cos$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة

x^4	+	$\cos 4x$
$4x^3$	-	$\frac{1}{4} \sin 4x$
$12x^2$	+	$-\frac{1}{16} \cos 4x$
$24x$	-	$-\frac{1}{64} \sin 4x$
24	+	$\frac{1}{256} \cos 4x$
0	-	$\frac{1}{1024} \sin 4x$

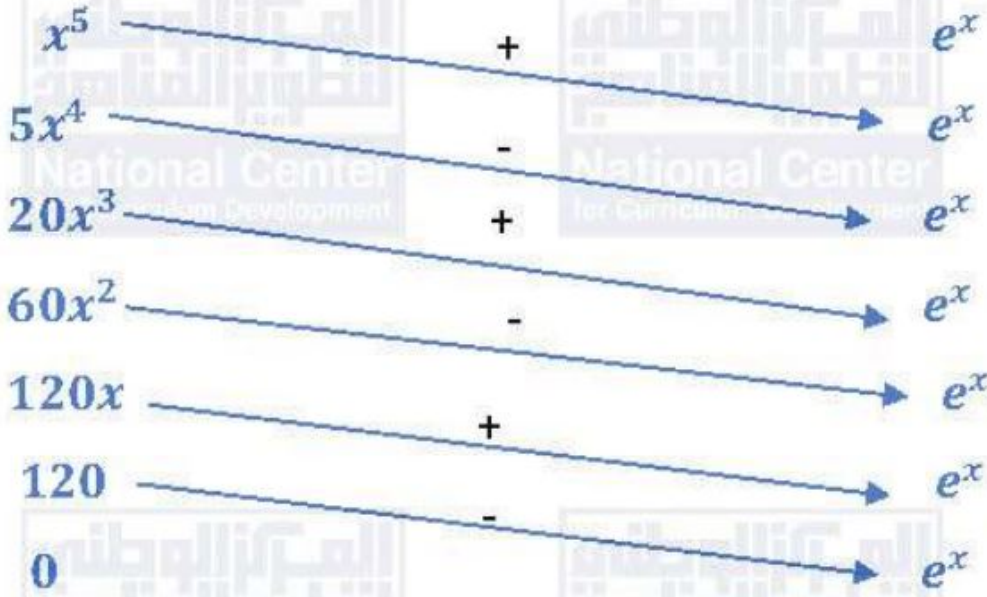
$$\int (4x^4 + 3124x - 332x \cos 4x - 316x^2 \sin 4x + 14x^3 \cos 4x) dx = 14x^4 \sin 4x \cos f$$

$$\int (x^5 e^x dx) \quad (b)$$

نفرض أن: $f(x) = x^5, g(x) = e^x$ ، استخدم طريقة الجدول للتكامل بالأجزاء:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة



$$\int x^5 e^x dx = e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

أتحقق من فهمي صفحة (68):

التكلفة الحدية: يمثل الاقتران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدية لكل قطعة (بالدينار) تنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$ ، علماً بأن $C(10) = 200$.

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx \\ u &= 0.1x + 1 \quad dv = e^{0.03x} \\ du &= 0.1 dx \quad v = \frac{1}{0.03} e^{0.03x} = 10.03 e^{0.03x} \\ C(x) &= \int (0.1x + 1)e^{0.03x} dx = (0.1x + 1)(10.03 e^{0.03x}) - \int 0.1 \cdot 10.03 e^{0.03x} dx \\ C(x) &= 10.03(x + 10)e^{0.03x} - 1000.9 e^{0.03x} + C \\ C(10) &= 200 \Rightarrow 200 = 10.03(10 + 10)e^{0.3} - 1000.9 e^{0.3} + C \\ C &= 200 \Rightarrow C \approx 260 \Rightarrow C(x) = 10.03e^{0.03x}(x - 70.3) + 260 \end{aligned}$$

التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة

أتحقق من فهمي صفحة (70):

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\int x^2 dx \quad \int a^x dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int (0.1x e^{-2x}) dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\int 0.1x e^{-2x} dx = 0.1 \int x e^{-2x} dx$$

$$= 0.1 \left(-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} dx \right)$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{0.1}{2} \int x^2 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{0.1}{2} \left(-\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} dx \right)$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{0.1}{4} x^3 e^{-2x} + \frac{0.1}{4} \int x^3 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{0.1}{4} x^3 e^{-2x} + \frac{0.1}{4} \left(-\frac{1}{2} x^4 e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} x^4 e^{-2x} dx \right)$$

$$= -\frac{0.1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{0.1}{4} x^3 e^{-2x} - \frac{0.1}{8} x^4 e^{-2x} + \frac{0.1}{8} \int x^4 e^{-2x} dx$$

التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض

أتحقق من فهمي صفحة (71):

أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

$$\int (x^2 dx (ax^3 + x^5) \sin)$$

$$\int x^2 dx (ax^3 + x^5) \sin$$

نجد كل تكامل على حدة. فنجد التكامل الأيسر كما يأتي:

$$y dy = y dy \Rightarrow \int y dy = \frac{1}{2} y^2 + C$$

$$\int x^2 \sin x^2 dx = \int x^3 \sin x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 - \int -x \cos x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \int x \cos x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos x^2 + \frac{1}{2} \int \cos x^2 dx$$

ونجد التكامل الأيمن كما يأتي:

$$y dy dy = y^2 dy = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + C$$

$$\int y^2 \sin y^2 dx = \int x^4 \sin x^2 dx = \int x^5 \sin x^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 - \int -2y \cos y^2 dy = -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 + \int 2y \sin y^2 dy$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 + \int \sin y^2 dy$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 + \frac{1}{2} \int \sin y^2 dy$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} y^2 \cos y^2 - \int -\frac{1}{2} y^2 \cos y^2 dy \right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 - \frac{1}{4} y^2 \cos y^2 + \frac{1}{4} \int y^2 \cos y^2 dy$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 - \frac{1}{4} y^2 \cos y^2 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} y^3 \cos y^2 - \int -\frac{1}{2} y^3 \cos y^2 dy \right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos y^2 - \frac{1}{4} y^2 \cos y^2 - \frac{1}{8} y^3 \cos y^2 + \frac{1}{8} \int y^3 \cos y^2 dy$$

$$\int (x^5 e^{x^2}) dx$$

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \int x^4 e^y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int x^3 e^y dy$$

$$= 12 \int y^2 e^y dy = y^2 dv = e^y dy du = 2y dy v = e^y \int y^2 e^y dy = y^2 e^y - \int 2y e^y dy = y^2 e^y - 2y e^y + \int 2e^y dy = y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y = (y^2 - 2y + 2)e^y \int x^5 dx = (12x^4 - x^2 + 1)e^x + C$$