

أدرب وأحل المسائل

التكامل بالأجزاء

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (x \cos(x+1)) dx$$

$$u = x+1 \quad du = dx \quad v = \sin u = \sin(x+1) \quad dv = \cos(x+1) dx$$

$$\int (x+1) \cos(x+1) dx = \int (u) \cos u du = u \sin u - \int \sin u du = (x+1) \sin(x+1) + \cos(x+1) + C$$

$$\int x e^{2x} dx$$

$$u = 2x \quad du = 2 dx \quad v = e^{2x} \quad dv = 2e^{2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int (u) dv = \frac{1}{2} (u v - \int v du) = \frac{1}{2} (x e^{2x} - \int e^{2x} du) = \frac{1}{2} (x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}) + C = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$\int (2x^2 - 1) e^{-x} dx$$

$$u = 2x^2 - 1 \quad du = 4x dx \quad v = e^{-x} \quad dv = -e^{-x} dx$$

$$\int (2x^2 - 1) e^{-x} dx = \frac{1}{4} \int (u) dv = \frac{1}{4} (u v - \int v du) = \frac{1}{4} ((2x^2 - 1) e^{-x} - \int -e^{-x} du)$$

$$= \frac{1}{4} ((2x^2 - 1) e^{-x} + \int e^{-x} du) = \frac{1}{4} ((2x^2 - 1) e^{-x} + \int e^{-x} (4x) dx)$$

$$= \frac{1}{4} ((2x^2 - 1) e^{-x} + 4 \int x e^{-x} dx) = \frac{1}{4} ((2x^2 - 1) e^{-x} + 4(-x e^{-x} - e^{-x})) + C = \frac{1}{4} (2x^2 - 1) e^{-x} - x e^{-x} - e^{-x} + C = \frac{1}{4} (2x^2 + 4x + 3) e^{-x} + C$$

$$\int x \ln x dx$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad v = x \quad dv = dx$$

$$\int x \ln x dx = \int (u) v du = \int \ln x \cdot x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

$$\int 5x \cos x \sin x dx$$

$$u = 2x \quad du = 2 dx \quad v = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad dv = \cos 2x dx$$

$$\int 5x \cos x \sin x dx = \frac{5}{2} \int (u) dv = \frac{5}{2} (u v - \int v du) = \frac{5}{2} (x \sin 2x - \int \cos 2x \cdot 2x dx)$$

$$= \frac{5}{2} (x \sin 2x - \int 2x \cos 2x dx) = \frac{5}{2} (x \sin 2x - (x \sin 2x - \int \sin 2x dx)) = \frac{5}{2} (x \sin 2x - x \sin 2x + \int \sin 2x dx) = \frac{5}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{5}{4} \cos 2x + C$$

$$\int 6x \tan x \sec x dx$$

$$u = \sec x \quad du = \sec x \tan x dx \quad v = x \quad dv = dx$$

$$\int 6x \tan x \sec x dx = 6 \int (u) dv = 6 \int \sec x \cdot x \cdot dx = 6 \int \sec x dx = 6 \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int (x \sin 2x) dx$$

$$x \sin 2x = -x \int x \csc 2x dx \quad u = dx \quad v = -\cot x \quad du = dx \quad dv = \csc 2x dx = \int x \csc 2x \sin 2x |x| + C | \sin x + \ln x dx = -x \cot x \sin x + \int \cos x dx = -x \cot x + \int \cot x \cot$$

$$\int (x^3 \ln x) dx$$

$$x^3 \ln x = -12x - 2 \ln x \quad dv = x - 3 dx \quad du = 1 x dx \quad v = -12x - 2 \int x - 3 \ln u = \ln x^2 x^2 - 14x - 2 + C = -\ln x + \int 12x - 3 dx = -12x - 2 \ln x - 21x dx = -12x - 2 \ln -14x^2 + C$$

$$\int (x^2 \tan^2 x \sec^2 x) dx$$

$$x^2 dx du = 4x dx v = 12 \tan^2 x \tan u = 2x^2 dv = \sec^2$$

ملاحظة: لإيجاد v استخدمنا طريقة التعويض، حيث: $\tan x = \frac{dy}{dx} \sec^2 y = \tan x$ ومنه:

$$x^2 \int 2x^2 \sec^2 x = \int y dy = 12y^2 = 12 \tan^2 x y dy \sec^2 x dx = \int \sec^2 x \tan x = \int \sec^2 x (x-1) dx \quad x dx = (\sec^2 x dx u = 2x dv = \tan^2 x) - \int 2x \tan^2 x dx = 2x^2 (12 \tan^2 \tan x x - x) - \int 2(\tan x - (2x(\tan x dx = x^2 \tan^2 x \tan x - x \int 2x^2 \sec^2 du = 2 dx v = \tan x x - 2x \tan x - x) dx = x^2 \tan^2 x \cos x + 2x^2 + 2 \int (\sin x - 2x \tan - x) dx = x^2 \tan^2 x | + C | \cos x + x^2 - 2 \ln x - 2x \tan x | - x^2 + C = x^2 \tan^2 | \cos + 2x^2 - 2 \ln$$

$$\int (x-2)^8 - x dx \quad (10)$$

هذه المسألة يمكن حلها بالتعويض، حيث: $(u = 8 - x \text{ أو } u = x - 2)$

وحلها بالأجزاء كالآتي:

$$u = x - 2 \quad dv = (8 - x) \quad 12 dx \quad du = dx \quad v = -23(8 - x) \quad 32 \int (x - 2)^8 - x dx = (x - 2) x - 23(8 - x) \quad 32 - \int -23(8 - x) \quad 32 dx = -23(x - 2)(8 - x) \quad 32 - 415(8 - x) \quad 52 + C$$

$$\int (2x dx) (11x^3 \cos x)$$

بالأجزاء 3 مرات، لنستخدم طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة

x^3	+	$\cos 2x$
$3x^2$	-	$\frac{1}{2} \sin 2x$
$6x$	+	$-\frac{1}{4} \cos 2x$
6	-	$-\frac{1}{8} \sin 2x$
0		$\frac{1}{16} \cos 2x$

$$2x + C \int 2x - 38 \cos 2x - 34x \sin 2x + 34x^2 \cos 2x dx = 12x^3 \sin x - 3 \cos f$$

$$\int (x^6 dx) (12f)$$

$$\int 6x^6 - x dx = -x^6 - \int x^6 dx = \int x^6 - x dx u = x dv = 6 - x dx du = dx v = -6 - x \ln \int$$

$$6) 2 + C 6 - 6 - x (\ln 6 dx = -x^6 - x \ln 6 + \int 6 - x \ln \ln$$

$$\int (2x dx) (13e^{-x} \sin f)$$

$$\int 2x dx = -12e^{-x} - \int 2x f e^{-x} \sin 2x dx du = -e^{-x} dx v = -12 \cos u = e^{-x} dv = \sin$$

$$2x dx du = -12e^{-x} dx v = 12 \sin 2x dx u = 12e^{-x} dv = \cos 2x - \int 12e^{-x} \cos$$

$$2x dx f e^{-x} \sin 2x - 14 \int e^{-x} \sin 2x - 14e^{-x} \sin 2x dx = -12e^{-x} \cos 2x f e^{-x} \sin$$

$$2x dx 2x) + C 54 \int e^{-x} \sin 2x + 2 \cos 2x dx = -14e^{-x} (\sin 2x dx + 14 \int e^{-x} \sin$$

$$2x) 2x + 2 \cos 2x dx = -15e^{-x} (\sin 2x) + C f e^{-x} \sin 2x + 2 \cos = -14e^{-x} (\sin$$

$$+ C$$

$$\int (x dx) (14 \sin x \ln \cos f)$$

$$\int x \sin x \ln x dx = \sin x \ln x \int \cos x dx v = \sin x \sin x dx du = \cos x dv = \cos \sin u = \ln$$

$$x + C x - \sin x \ln x dx = \sin - \int \cos$$

$$\int ((1+e^x) dx) (15e^x \ln f)$$

$$\int (1+e^x)(1+e^x) dx = e^x \ln(1+e^x) dv = e^x dx du = e^x 1 + e^x dx v = e^x \int e^x \ln u = \ln$$

$$(1+e^x) - \int (e^x + -(1+e^x)) - \int (e^x + -11+e^x) dx = e^x \ln - \int e^{2x} 1 + e^x dx = e^x \ln$$

$$(1+e^{-x})+C(1+e^x)-e^x-\ln e^{-x}e^{-x+1}dx=e^x \ln$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = 12e^x(\sin x) + C \Rightarrow \int_0^{\pi/2} 2e^x \cos x + \cos x dx = 12e^x(\sin x \cos x) \int_{\pi/2}^0 = 12e^{\pi/2} - 12e^0 = 12e^{\pi/2} - 12$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx$$

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = 2x \ln x dv = dx du = 2x dx v = x \int_1^2 1e^2 \ln x dx u = 2 \ln x^2 dx = \int_1^2 1e^2 \ln 1e \ln f 1-2e+2=2e-0-2e+2=2e-2 \ln x | 1e-2x | 1e=2e \ln e - \int_1^2 1e^2 dx = 2x \ln$$

$$\int_1^2 (x e^x) dx$$

$$\int_1^2 (x e^x) dx = \int_1^2 x dx + \int_1^2 x dx x + x dx = \int_1^2 \ln e^x dx = \int_1^2 (\ln x + \ln(x e^x)) dx = \int_1^2 (\ln 12 \ln f$$

نجد بطريقة $\int_1^2 x dx \ln x$ الأجزاء:

$$\int_1^2 x | 12 - x | 12 = x | 12 - \int_1^2 12 dx = x \ln x dx = x \ln x dv = dx du = 1 x dx v = x \int_1^2 \ln u = \ln (x e^x) dx 2 - 1 \int_1^2 x dx = 12 x^2 | 12 = 42 - 12 = 32 \Rightarrow \int_1^2 \ln 1 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - \ln 2 \ln 2 + 122 - 1 + 32 = 2 \ln = 2 \ln$$

$$\int_0^{\pi/3} 3x dx$$

$$3x | \pi 13 x dx = 13 x \tan 3x \int_{\pi 12}^{\pi 9} 9 x \sec^2 3x dx du = dx v = 13 \tan u = x dv = \sec^2 3x dx = 3x \cos 3x | \pi 12 \pi 9 - \int_{\pi 12}^{\pi 9} 13 \sin 3x dx = 13 x \tan 2 \pi 9 - \int_{\pi 12}^{\pi 9} 13 \tan \pi \cos \pi 4 + 19 \ln \pi 3 - \pi 36 \tan 3x | \pi 12 \pi 9 = \pi 27 \tan \cos 3x | \pi 12 \pi 9 + 19 \ln 13 x \tan 12 12 - 19 \ln \pi 4 = \pi 327 - \pi 36 + 19 \ln \cos 3 - 19 \ln$$

$$\int_1^2 x dx$$

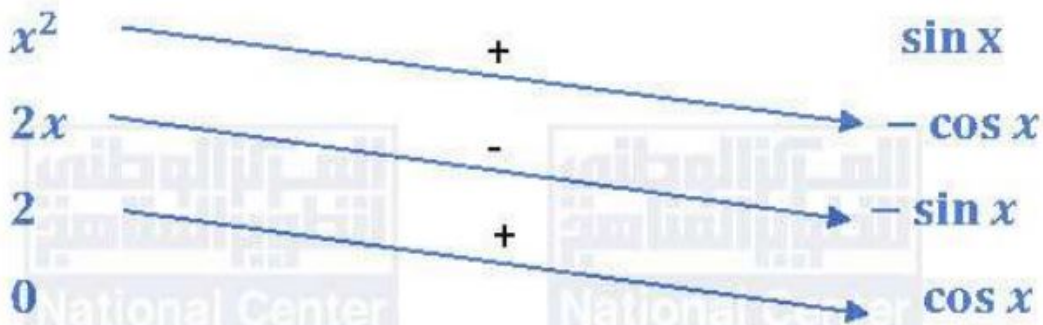
$$\int_1^2 x | 1e - \int_1^2 1e 15 x^4 dx x dx = 15 x^5 \ln x dv = x^4 dx du = dx x v = 15 x^5 \int_1^2 1e x^4 \ln u = \ln x | 1e - 125 x^5 | 1e = 15 e^5 - 0 - 125 e^5 + 125 = 4 e^5 + 125 = 15 x^5 \ln$$

$$\int_0^{\pi/2} x dx$$

نجد $\int_0^{\pi/2} x dx x^2 \sin f$ باستخدام طريقة الجدول:

$f(x)$ ومشتقاته المتكررة

$g(x)$ وتكاملاته المتكررة



$$\int_0^{\pi/2} (x^2 + 2x + 2) \sin x \, dx = -x^2 \cos x - 2x \sin x + 2 \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2x + 2 \cos x \sin$$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx \quad (22)$$

$$u = x \, dv = (e^{-2x} + e^{-x}) \, dx \quad du = dx \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) \, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - xe^{-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 (-\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}) \, dx = -\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1} + \frac{1}{4}e^{-2} + e^{-1} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 x e^x (1+x)^2 \, dx \quad (23)$$

$$u = x e^x \, dv = (1+x)^2 \, dx \quad du = (x e^x + e^x) \, dx = e^x (x+1) \, dx \quad v = -\frac{1}{3}(1+x)^{-3}$$

$$\int_0^1 x e^x (1+x)^2 \, dx = -\frac{1}{3}x e^x (1+x)^{-3} - \int_0^1 e^x (x+1) (1+x)^{-3} \, dx = -\frac{1}{3}e^x (1+x)^{-3} \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 e^x (x+1)^{-2} \, dx = -\frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{3}e^{-1} = \frac{1}{3}(e^{-1} - e^2)$$

$$\int_0^1 x^3 \ln 3 \, dx \quad (24)$$

$$3 \, dx = x^3 \ln 3 \quad \int_0^1 3x^3 \ln 3 \, dx = x^3 \ln 3 \Big|_0^1 = 3 \ln 3$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int x^3 e^{x^2} \, dx \quad (25)$$

$$y = x^2 \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x} \quad \int x^3 e^{x^2} \, dx = \int x^2 e^y \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2} \int x e^y \, dy = \frac{1}{2} \int y e^y \, dy = \frac{1}{2} (y e^y - e^y) + C = \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + C$$

(26) $\int \frac{dx}{x \cos x}$

$$y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dy, x = e^y \int \frac{dx}{x \cos x} = \int \frac{e^y dy}{e^y \cos y} = \int \frac{dy}{\cos y} = \ln |\sec y + \tan y| + C = \ln |\sec(\ln x) + \tan(\ln x)| + C$$

(27) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 \sin x}$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}, x = \sqrt{y} \int \frac{x^2 dx}{x^3 \sin x} = \int \frac{1}{\sqrt{y} \sin \sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y \sin \sqrt{y}}$$

(28) $\int \frac{2x dx}{x \sin e^x \cos x}$

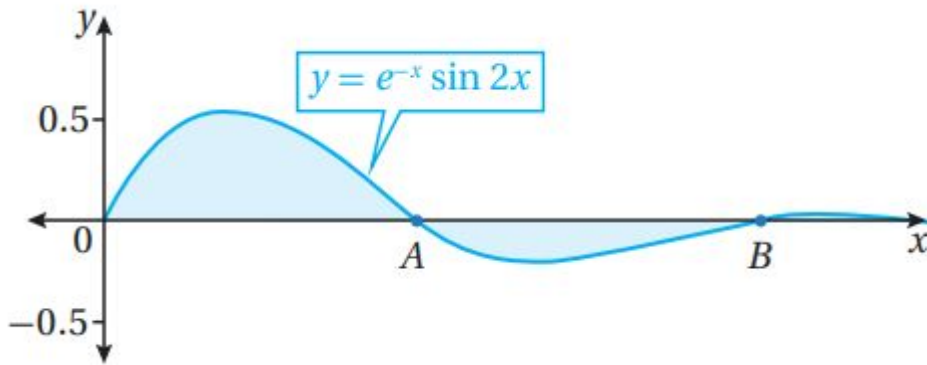
$$x = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow dx = e^y dy, x = e^y \int \frac{2x dx}{x \sin e^x \cos x} = \int \frac{2e^y dy}{\sin e^y \cos e^y} = \int \frac{2e^y dy}{\sin 2e^y} = \int \frac{2e^y dy}{2 \sin e^y \cos e^y} = \int \frac{e^y dy}{\sin e^y \cos e^y}$$

(29) $\int \frac{x dx}{x \sin e^x}$

$$x = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow dx = e^y dy, x = e^y \int \frac{x dx}{x \sin e^x} = \int \frac{e^y dy}{\sin e^y} = \int \frac{e^y dy}{\sin e^y}$$

(30) $\int \frac{x^3 e^{x^2} (x^2 + 1)^2 dx}{x^2}$

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}, x = \sqrt{y} \int \frac{x^3 e^{x^2} (x^2 + 1)^2 dx}{x^2} = \int \frac{\sqrt{y} e^y (y + 1)^2 \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}}}{1} = \frac{1}{2} \int e^y (y + 1)^2 dy$$



إذا كان الشكل المجاور
يمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = e^{-x} \sin 2x$
حيث: $x \geq 0$ فأجيب عن
الأسئلة الثلاثة الآتية
تباعاً:

(31) أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

الإحداثيان x للنقطتين A و B هما أصغر حلين موجبين للمعادلة:

$$e^{-x} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \Rightarrow A(\frac{\pi}{2}, 0), B(\pi, 0)$$

(32) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -e^{-x} \sin 2x dx$$

للبسيط سنجد أولاً: $\int e^{-x} \sin 2x dx$ (التكامل غير المحدود)

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \int -\frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x dx \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x dx \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x dx) \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x dx \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 2x dx \\ \int e^{-x} \sin 2x dx &= -\frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x + C \end{aligned}$$

(33) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = te^{-t/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t te^{-t/2} dt = \int_0^t t dv = \int_0^t t (-2e^{-t/2}) dt \\ s(t) &= -2 \int_0^t te^{-t/2} dt = -2 \int_0^t (-2e^{-t/2} - t) dt \\ s(t) &= -2 \left(-4e^{-t/2} - \frac{1}{2} t^2 \right) + C \\ s(0) &= 0 = -2 \left(-4e^{-0} - \frac{1}{2} (0)^2 \right) + C = -2(-4) + C = 8 + C \Rightarrow C = -8 \\ s(t) &= -2 \left(-4e^{-t/2} - \frac{1}{2} t^2 \right) - 8 = 4e^{-t/2} - t^2 - 8 \end{aligned}$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $(f(x), y=f(x))$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$.
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $(f(x), y=f(x))$:

$$(x; (0,2)) \quad (34) \quad f'(x) = (x+2)\sin x$$

$$xf(x) = -(x+2)\cos x \quad dx \quad du = dx \quad v = -\cos x \quad dx \quad u = x+2 \quad dv = \sin x \quad f(x) = \int (x+2)\sin x + C \quad f(0) = -2+0+C = -2+0+C \Rightarrow C=4$$

$$f(x) = \int (x+2)\sin x + C = \int (x+2)\cos x + C = \int (x+2)\cos x + C = -\cos x + C = -\cos x + 4$$

$$(f'(x) = 2xe^{-x}; (0,3)) \quad (35)$$

$$f(x) = \int 2xe^{-x} dx \quad u = 2x \quad dv = e^{-x} \quad du = 2 dx \quad v = -e^{-x} \quad f(x) = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \quad f(0) = 0 - 2 + C = -2 + C \Rightarrow C = 5$$

$$f(x) = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 5$$



(36) دورة تدريبية: تقدمت دعاء لدورة

تدريبية متقدمة في الطباعة. إذا كان عدد

الكلمات التي تطبعها دعاء في الدقيقة يزداد

بمعدل: $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$ ، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها دعاء في

الدقيقة بعد t أسبوعاً من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$ ، علماً بأن دعاء كانت تطبع 40

كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.

$$N(t) = \int (t+6)e^{-0.25t} dt \quad u = t+6 \quad dv = e^{-0.25t} \quad du = dt \quad v = -4e^{-0.25t} \quad N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} + \int 4e^{-0.25t} dt = -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + C$$

$$N(0) = -24 - 16 + C = 40 \Rightarrow C = 80 \Rightarrow N(t) = -4(t+6)e^{-0.25t} - 16e^{-0.25t} + 80$$