

مهارات التفكير العليا

التكامل بالأجزاء

(37) تبرير: أثبت أن: $\int \ln \frac{1}{23x^2} dx = 9 \ln 1/23x^2 \ln 6 - 215722x dx$.

$$2x | 123 - \int 122x dx = 13x^3 \ln 2x dv = x^2 dx du = 1x dx v = 13x^3 \int 123x^2 \ln u = \ln 6 - 215726 - 3 + 172 = 9 \ln 2x | 123 - 19x^3 | 123 = 9 \ln 313x^2 dx = 13x^3 \ln$$

(38) تبرير: أثبت أن: $\int \sin \frac{\pi}{4} x \sin 0 \pi - 2165x dx = 3x dx$.

$$2x - 116 \sin 8x dx du = dx v = 14 \sin 2x - \cos 3x dx = 12 (\cos 5x \sin u = x dv = \sin 2x - 118x) | 0 \pi 4 - \int 0 \pi 4 (14 \sin 2x - 116 \sin 3x dx = x (14 \sin 5x \sin 8x \int 0 \pi 4 x \sin 8x) | 0 \pi 4 2x + 1128 \cos 8x) | 0 \pi 4 - (-18 \cos 2x - 116 \sin 8x) dx = x (14 \sin 6 \sin = \pi 4 (14) + 0 - 1128 - 18 + 1128 = \pi - 216$$

(39) تبرير: إذا كان: $\int_0^a x e^{x/2} dx = 6$, فأثبت أن a يحقق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

$$u = x dv = e^{12} x dx du = dx v = 2e^{12} x \int 0^a x e^{12} x dx = 2x e^{12} | 0^a - \int 0^a 2e^{12} x dx = 2x e^{12} | 0^a - 4e^{12} x | 0^a = 2ae^{12} a - 4e^{12} a + 4 \Rightarrow 2ae^{12} a - 4e^{12} a + 4 = 62ae^{12} a = 4e^{12} a + 2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $2e^{12} a$ نحصل على:

$$a = 2 + e^{-12a}$$

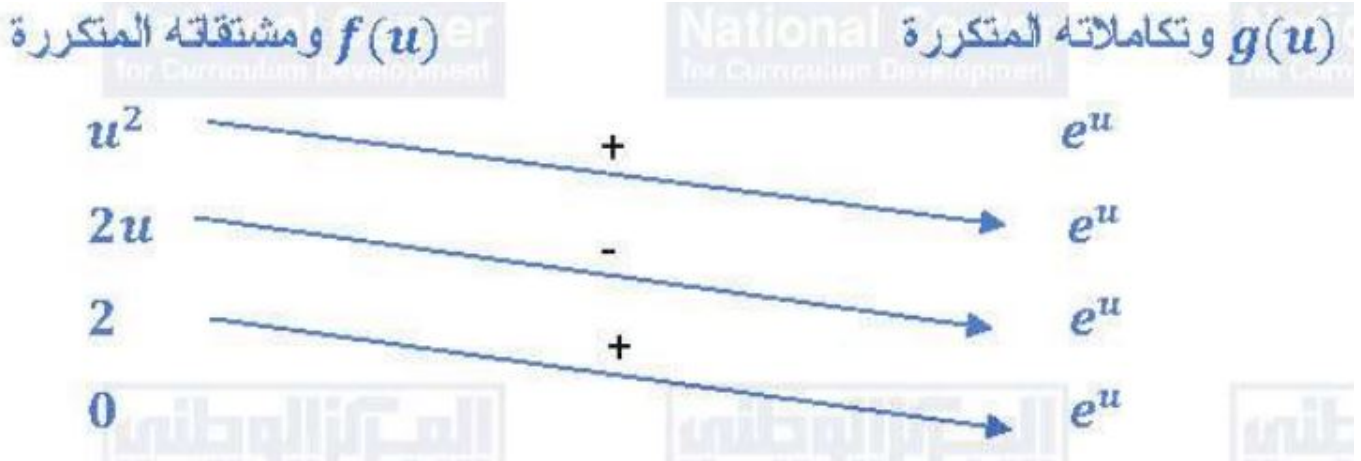
لذا فإن a يحقق المعادلة $x = 2 + e^{-x/2}$

(40) تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 dx$ بطريقتين مختلفتين، مبرراً إجابتي.

الطريقة الأولى بالتعويض:

$$x^2 dx = \int u^2 x du = \int u^2 e u du x \Rightarrow du dx = 1x \Rightarrow dx = x du, x = eu \int (\ln u = \ln$$

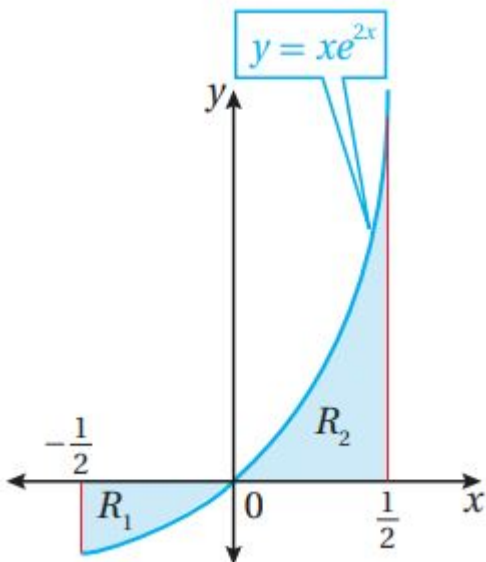
بالأجزاء مرتين، نستخدم الجدول:



$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

الطريقة الثانية: بالأجزاء مباشرة:

$$\int x^2 \ln x dx = \int x^2 \cdot \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$



تبرير: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$ حيث: $x \leq 0$ و $x \geq 0$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(41) أجد مساحة كل من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

$$A_1 = -\int_{-\infty}^0 xe^{2x} dx, A_2 = \int_0^{\infty} xe^{2x} dx$$

نجد التكامل غير المحدود $\int xe^{2x} dx$ بالأجزاء:

$$u = x, dv = e^{2x} \Rightarrow du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} \Rightarrow \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$x - 14e^{2x} + C = 14e^{2x}(2x - 1) + C \Rightarrow A(R1) = -14e^{2x}(2x - 1) \Big|_{120} = 14 - 12e \\ = e - 24e \quad A(R2) = 14e^{2x}(2x - 1) \Big|_{012} = 0 + 14 = 14$$

(42) أثبت أن مساحة المنطقة R1 إلى مساحة المنطقة R2 تساوي (e-2):e.

$$A(R1)A(R2) = e - 24e \quad 14 = e - 2e \quad A(R1):A(R2) = (e - 2):e$$

تحد: استعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كل مما يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب،
و a ≠ 0:

$$(x) + C \quad (43) \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - (-1 + (n+1)) \ln|x| \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int x^{n+1} dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} - \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} - \ln|x| + C \\ \int x^{n+1} \ln|x| dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} \ln|x| - \int \frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} \ln|x| - \frac{1}{n+2} \int x^{n+1} dx \\ = \frac{x^{n+2}}{n+2} \ln|x| - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} + C = \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} (-1 + (n+1)) \ln|x| + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + C$$

$$(44) \quad \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^{n+1} e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^n e^{ax} dx$$

$$u = x^{n+1} \quad dv = e^{ax} dx \quad du = (n+1)x^n dx \quad v = \frac{1}{a} e^{ax} \\ \int x^{n+1} e^{ax} dx = \frac{x^{n+1} e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^n e^{ax} dx$$