أتدرب وأحل المسائل

المعادلات التفاضلية

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يأتي:

(y=x;xy′−y=0 (1

y′=12xxy′−y=x12x−x=12x−x=−12x≠0

إذن، y=x ليس حلاً للمعادلة التفاضلية xy′−y=0

(x−5x+7;y′′−1x=0 (2y=xln

x−4y′′=1xy′′−1x=1x−1x=0x−5=lny′=x(1x)+ln

إذن، x−5x+7y=xln هو حل للمعادلة التفاضلية y′′−1x=0

(x;y′+y2=1 (3y=tan

x≠1x=1+2tan2x+tan2xy′+y2=sec2y′=sec2

إذن، xy=tan ليس حلاً للمعادلة التفاضلية y′+y2=1

(y=ex+3xex;y′′−2y′+y=0 (4

y′=ex+3xex+3ex=4ex+3xexy′′=4ex+3xex+3ex=7ex+3xexy′′−2y′+y=7ex+3xex−8ex−6xex+ex+3xex=0

إذن، y=ex+3xex هو حل للمعادلة التفاضلية y′′−2y′+y=0

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

(dydx=3xy (5

dydx=3xydyy=3xdx⇒∫dyy=∫3xdx⇒2y12=32x2+C

(dydx+3xy2=0 (6

dydx=−3xy2⇒y2dy=−3xdx∫y2dy=∫−3xdx⇒13y3=−32x2+C (y (7xsindydx=cos

yydy=∫cscxdx∫cscydy=∫cosxdx⇒∫cscy=cosydxdysinxsindydx=cos
ydy=−∫−(csc2y+cotycscycoty+cscydy=∫csc2y+cotycscy+cot×csc
x+Cy|=siny+cot|cscy|⇒−lny+cot|cscydy=−lny+coty)cscycoty+csc

(dydx=x(x2+1)2 (8

dy=x(x2+1)2dx∫dy=∫x(x2+1)2dxu=x2+1⇒dx=du2x⇒∫x(x2+1)2dx
=∫xu2du2x=12∫1u2du=−12u+C=−12(x2+1)+C⇒∫dy=∫x(x2+1)2d
x⇒y=−12(x2+1)+C

(dydx=xex+y (9

dydx=xexey⇒dyey=xexdx∫dyey=∫xexdx⇒∫e−ydy=∫xexdx⇒−e−y=
u=xdv=exdxdu=dxv=ex⇒∫xexdx=xex−∫exdxالأجزاء نستخدم ∫xexdx
=xex−ex+C⇒−e−y=xex−ex+C

(e−1/xdydx=x−2y2 (10

ال dyy2=x−2e−1xdx=e1xx2dx∫y−2dy=∫e1xx2dx⇒−y−1=∫e1xx2dx
u=1x⇒dudx=−1x2⇒dx=−x2du⇒∫e1xx2dx=∫eux2×−xتعويض نستخدم
2du=∫−eudu=−eu+C=−e1x+C−y−1=∫e1xx2dx⇒1y=e1x+C

(dydx=xyx−3 (11

|x−3|+C|y|=x+3lndyy=xx−3dx∫dyy=∫xx−3dx∫dyy=∫(1+3x−3)dxln

(yx3+2 (12dydx=3x2sin2

ydy=∫3x2x3+2y=∫3x2(x3+2)dx∫csc2y=3x2(x3+2)dx∫dysin2dysin2
|x3+2|+Cy=lndx−cot

(x (13dydx=y3ln

xxdv=dxdu=dxxv=x∫lnu=lnالأجزاء نستخدم xdxxdx∫dyy3=∫lndyy3=ln
x−x+Cxdx⇒−12y−2=xlnx−x+C⇒∫y−3dy=∫lnx−∫xdxx=xlndx=xln

(dydx=2x3(y2−1) (14

1y2−1=1(y−1نستخدم الكسور الجزئية dyy2−1=2x3dx∫dyy2−1=∫2x3dx
)(y+1)=Ay−1+By+1A(y+1)+B(y−1)=1y=1⇒A=12y=−1⇒B=−12⇒1
y2−1=12y−1+−12y+1⇒∫dyy2−1=∫2x3dx⇒∫(12y−1+−12y+1)dy=
|y+1|=12x4+C|y−1|−12ln∫2x3dx⇒12ln

(x (15xcos2ydydx=sin3

x⇒dx=u=cosنستخدم التعويض xdxxcos2xdx∫ydy=∫sin3xcos2ydy=sin3
xu2du=∫(−1+cosx=∫−sin2xu2du−sinxdx=∫sin3xcos2x∫sin3du−sin
x−1x)u2du=∫(−1+u2)u2du=∫(u4−u2)du=15u5−13u3+C=15cos52
x+Cx−13cos3xdx⇒12y2=15cos5xcos2x+C⇒∫ydy=∫sin33cos3

(dydx=xy (16

dyy=xdx∫dyy=∫xdx∫y−12dy=∫x12dx2y12=23x32+C

(x (17dydx=yln

xdv=u=lnنستخدم الأجزاء xdxx12dx∫dyy=∫12lnx12dx∫dyy=∫lndyy=ln
x−1xdx=12xlnx−x+C⇒∫12lnx−∫xdxx=xlnxdx=xlndxdu=dxxv=x∫ln
x−12x+C|y|=12xlnxdx⇒ln2x+C∫dyy=∫12ln

(2x+1)(x+2)dydx=−3(y−2) (18)

الجزئية الكس (2x+1)(x+2)dy=−3(y−2)dx∫−13dyy−2=∫dx(2x+1)(x+2)
2x+1)(x+2)=A2x+1+Bx+2A(x+2)+B(2x+1)=1x=−12⇒)1ور نستخدم
A=23x=−2⇒B=−13⇒1(2x+1)(x+2)=232x+1+−13x+2⇒∫−13dyy−
|y−|x+2|+C⇒−ln|2x+1|−13ln|y−2|=13ln2=∫dx(2x+1)(x+2)⇒−13ln
|2x+1x+2|+C|y−2|=ln|x+2|+C⇒−ln|2x+1|−ln2|=ln

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

(dydx=y24−x;y(1)=2 (19

dydx=y24−xdyy2=4−xdx∫dyy2=∫4−xdx∫y−2dy=∫(4−x)12dx−1y=−23(4−x)32+C العام الحل

1y=−23(4−x)32+23−12− بتعويض (C⇒C=23−12 (1,2+23−=12− الخاص الحل

(xy;y(0)=1 (20dydx=2sin2

2x)dx12xdx∫ydy=∫(1−cosxdx∫ydy=∫2sin2xyydy=2sin2dydx=2sin2 2x+Cy2=x−12sin العام الحل

2x+1212y2=x−12sinيتعويض C⇒C=12 0,1+0=12 الخاص الحل

(y;y(0)=π4 (21xcos2dydx=2cos2

ydxdx∫sec2y=∫2cos2xdx∫dycos2y=2cos2ydycos2xcos2dydx=2cos2 2x+Cy=x+12sin2x)dxtany=∫(1+cos العام الحل

2x+1y=x+12sinC=1tanبتعويض (C(0,π4+0+0=1 الخاص الحل

(xey;y(π)=0 (22xesindydx=cos

x⇒dudxu=sinالتعويض نستخدم xdxxesinxey∫eydy=∫cosxesindydx=cos x=∫eudu=eu+C=xeu×ducosxdx=∫cosxesinx∫cosx⇒dx=ducos=cos e0=e0+C π,0العام الحل x+Cxdxey=esinxesinx+C⇒∫eydy=∫cosesin بتعويض⇒ xC=0ey=esin الخاص الحل

(dydx=8x−18(3x−8)(x−2);y(3)=8 (23

dydx=8x−18(3x−8)(x−2)∫dy=∫8x−18(3x−8)(x−2)dx الكسور الجزئية نستخدم 8x−18(3x−8)(x−2)=A3x−8+Bx−2A(x−2)+B(3x−8)=8x−18x =2⇒B=1x=83⇒A=5⇒8x−18(3x−8)(x−2)=53x−8+1x−2⇒∫dy=∫8x |x−2||3x−8|+ln−18(3x−8)(x−2)dx⇒y=∫(53x−8+1x−2)dx⇒y=53ln |x−2|+8|3x−8|+lny=53lnبتعويض C⇒C=8 3,8+0+0=8العام الحل +C الخاص الحل

(dydx=1xy;y(e)=1 (24

C=⇒بتعويض C e,1+1=12العام الحل |x|+Cdydx=1xy∫ydy=∫dxx12y2=ln
الخاص الحل |x|−12−121zyz=ln

(25) تتحرك سيارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: dvdt=10−0.5v، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية، أجد السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علماً بأن السيارة تحركت من وضع السكون.

|10−0.5v|=t+C⇒dvdt=10−0.5vdv10−0.5v=dt∫dv10−0.5v=∫dt−2ln
ln⇒بتعويض 10 t=0,v=010=0+C⇒C=lnlnالعام الحل |10−0.5v|=−t2+Cln
الخاص الحل |10−0.5v10|=−t210⇒ln|10−0.5v|=−t2+ln

إذن، يمكن نمذجة السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها بالعلاقة الآتية:

|10−0.5v10|=−t2ln

(26) ذئاب: يمكن نمذجة معدل تغير عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: dNdt=260−0.4N، حيث N عدد الذئاب في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بده الدراسة هو 300 ذئب.

dNdt=260−0.4N=0.4(650−N)dN650−N=0.4dt∫dN650−N=∫0.4dt−l
نعو 350 t=0,N=300350=0+C⇒C=−lnln−العام الحل |650−N|=0.4t+Cn
ض⇒−الخاص الحل |350650−N|=0.4t350⇒ln|650−N|=0.4t−lnln

لا يمكن أن يكون N=650 لأن ln 0 غير معرف ولأن N=300 عندما t=0 والاقتران N t) متصل فلا يمكن أن يكون N أكبر من 650، ولذا فإن N>0 ويكون |N−650| مسار لـ N−650

(350650−N)=lnنعوض t=3 نجد (350650−N)=0.4t N|350650−N|=lnln⇒
1.2⇒350650−N=e65⇒650−N350=e−65N=650−350e−65≈545

إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئاب في تلك الغابة 545 ذئباً تقريباً.

كرة: تنكم ش كرة، ويتغيّر نصف قطرها بمعدل يمكن نمذجتـه بالمعادلة التفاضلية: drdt=−0.0075r2، حيث r طول نصف قطر الكرة بالسنتيمتر، وt الزمن بالثواني بعد بدء انكماش الكرة:

(27) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قطر الكرة بعد t ثانية، علماً بأن طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

drdt=−0.0075r2∫−drr2=∫0.0075dt1r=0.0075t+C الحل العام +0=120
t=0,r=20 C⇒C=120 نعوض1r=0.0075t+120⇒r=201+0.15t الحل الخاص

(28) بعد كم ثانية يصبح طول نصف قطر الكرة 10 cm؟

نضع r=10 في المعادلة الناتجة:

201+0.15t⇒0.1=1+0.15t20⇒2=1+0.15t⇒t=10.15≈6.67s=10

إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10cm بعد 6.67 ثانية تقريباً بعد بدء انكماشها.

حشرات: يتغير عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: tdndt=0.2n(0.2−cos)، حيث n عدد الحشرات، وt الزمن بالأسابيع بعد بدء ملاحظة الحشرات:

(29) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعاً، علماً بأن عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

∫lndnn=∫0.2(0.2−cost)dt)+Cn=0.2(0.2t−sin الحل العام 400=0+C⇒ln
400 t=0,n=400C=ln نعوضlnn=0.2(0.2t−sin400⇒lnt)+ n400=0.2(0.
الحل الخاص (tt)⇒n=400e0.2(0.2t−sin2t−sin

(30) أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

نعوض t=3 في المعادلة الأخيرة:

n=400e0.2(0.2t−sint)=400e0.2(0.6−sin3)≈400e0.12−0.028≈400e
0.092≈439

إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات 439 حشرة تقريباً.

(31) تمثل المعادلة التفاضلية: xdydx=ycos ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (0,1).

C⇒C=0 y=+0=0الحل العام x+C|y|=sinxdx⇒lnx∫dyy=∫cosdydx=ycos xx⇒y=esin|y|=sinln⇒نعوض 1,x=0

ملاحظة: منحنى الاقتران xy=−esin لايمر بالنقطة (0,1).

(32) تمثل المعادلة التفاضلية: x(x+1)dydx=y ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (1,3).

1x(x+1)=Ax+Bx+1A(x+1)+B(xنستخدم الكسور الجزئية (dyy=∫dxx(x+1∫)=1x=0⇒A=1x=−1⇒B=−1⇒1x(x+1)=1x+−1x+1⇒∫dyy=∫dxx(x+1) 23=0−lnlnالحل العام |x+1|+C|x|−ln|y|=ln|y|=∫(1x+−1x+1)dx⇒ln⇒ln |y|6⇒ln|x+1|+ln|x|−ln|y|=lnln⇒نعوض 6 y=3,x=12=ln3+ln+C⇒C=ln |6xx+1|⇒|y|=|6xx+1|⇒y=6xx+1=ln

ملاحظة: منحنى الاقتران y=−6xx+1 لا يمر بالنقطة (1,3)