

مهارات التفكير العليا

المعادلات التفاضلية

تحد: أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dy/dx = xy^2 - xy - 1y^2 + y) \quad (33)$$

$$dy/dx = xy^2 - 1y^2 + y - xy \Rightarrow dy/dx = 1y^2(x-1) - y(x-1) = (x-1)(1y^2 - y) \Rightarrow dy(1y^2 - y) = (x-1)dx \int dy(1y^2 - y) = \int (x-1)dx \int y^2(1 - y^3) dy = \int (x-1)dx - \frac{1}{3} \int y^3 dy = \frac{1}{2}x^2 - x + C - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{3}y^3 + C_2 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + C_1 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{3}y^3 = C_2 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + C_1 - \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{3}y^3 = C_2$$

$$(dy/dx = x^2y - 1 - 2x^3y - 2) \quad (34)$$

$$dy/dx = x^2y - 1 - 2x^3y - 2 = x^2y - 2x^3y - 3 = y(x^2 - 2x^3) - 3 = yx^2(1 - 2x) - 3 \Rightarrow yx^2(1 - 2x) - 3 = dy/dx \Rightarrow yx^2(1 - 2x) dy = (dx^2 - 2x^3) dx - 3 dx \Rightarrow \int yx^2(1 - 2x) dy = \int (x^2 - 2x^3) dx - 3 \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}yx^2(1 - 2x)^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 3x + C \Rightarrow \frac{1}{2}yx^2(1 - 2x)^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 3x + C$$

$$(y^2 + \tan^2 x + \tan^2 y) dy/dx = 1 + \tan^2 x$$

$$(y^2 + \tan^2 x + \tan^2 y) dy/dx = 1 + \tan^2 x \Rightarrow (y^2 + \tan^2 y) dy = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow \int (y^2 + \tan^2 y) dy = \int (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y \sin 2y - \frac{1}{4}y^2 \cos 2y = x + \frac{1}{2} \tan 2x + C \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y \sin 2y - \frac{1}{4}y^2 \cos 2y = x + \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

تبرير: يمكن نمذجة معدل تحلل مادة مشعة بالمعادلة التفاضلية: $dx/dt = -\lambda x$, حيث x الكتلة المتبقية من المادة المشعة بالمليغرام بعد t يوماً، و $\lambda > 0$:

(36) أثبت أنه يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$, حيث a ثابت، مبرراً إجابتك.

$$dx/dt = -\lambda x \Rightarrow \int dx/x = \int -\lambda dt \Rightarrow \ln|x| = -\lambda t + C \Rightarrow |x| = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} e^C = e^{-\lambda t} x_0$$

لكن الكمية x لا تكون سالبة، فتحذف رمز القيمة المطلقة.

$$e^C \Rightarrow x = ae^{-\lambda t} \text{ ليكن ثابت } x = -\lambda t + C \Rightarrow x = e^{-\lambda t} + C = e^{-\lambda t} x_0 + C$$

(37) إذا كان عمر النصف للمادة المشعة هو الوقت اللازم لتحلل نصف هذه المادة،

و a كتلة المادة الابتدائية، فأثبت أنّ عمر النصف للمادة المشعة هو $2\lambda \ln 2$ ، مبرراً إجابتي.

الكمية الابتدائية: $x(0)=a$

المطلوب: حساب الزمن الذي يكون عنده $x=12a$ ، نعوض:

$$2\lambda 2 \Rightarrow t = \ln 12a = a e^{-\lambda t} \Rightarrow 12 = e^{-\lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda t = \ln 2$$

تبرير: تمثل المعادلة التفاضلية: $dy/dx = -2x^3y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

(38) أجد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مبرراً إجابتي.

$$dy/dx = -2x^3y$$

لكي تكون العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، يجب أن تحققها.

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير x

$$2x + 2ny dy/dx = 0 \Rightarrow dy/dx = -x/ny$$

نعوض المشتقة في المعادلة التفاضلية:

$$x/ny = -2x^3y \Rightarrow 2nxy = 3xy^2 \Rightarrow n = 3xy^2/xy = 3/2$$

(39) أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(5,4)$ ، مبرراً إجابتي.

النقطة $(5,4)$ تحقق المعادلة:

$$a \Rightarrow a = 49 \Rightarrow x^2 + 32y^2 = 49 = (16)25 + 32 \Rightarrow$$

لإيجاد الإحداثي x لنقاط التقاطع منحنى العلاقة مع المحور x نضع $y=0$ في معادلتها

$$x^2 = 0 + 49 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow$$

إحداثيات نقطتي تقاطع العلاقة $x^2 + 32y^2 = 49$ مع المحور x هما $(7,0)$ ، $(-7,0)$