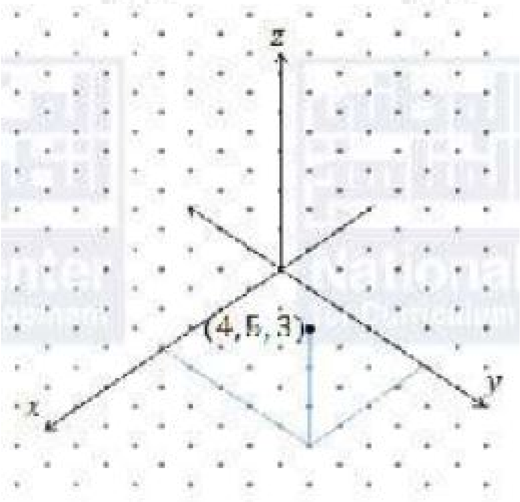
أتدرب وأحل المسائل

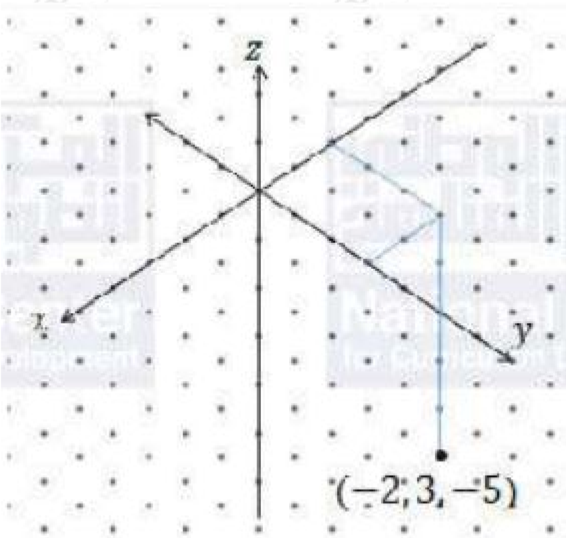
المتجهات في الفضاء

أعيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

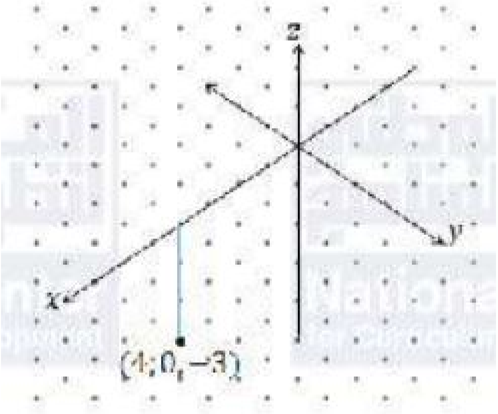
(1) (4,5,3)



(2) (5−,2,3−)



(3) (3−,4,0)



أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

(4) (5,4,2),(2,8−,3)

A(3,−2,8),B(5,4,2)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=22+62+(−6)2=76=219N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(3+52,−2+42,8+22)=(4,1(,5

(5) (5,3−,2),(2,7,0−)

A(−2,7,0),B(2,−5,3)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=16+144+9=169=13N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(−2+22,7−52,0+32)=(0,1,(32

(6) (3,6,7−),(5−,12,8)

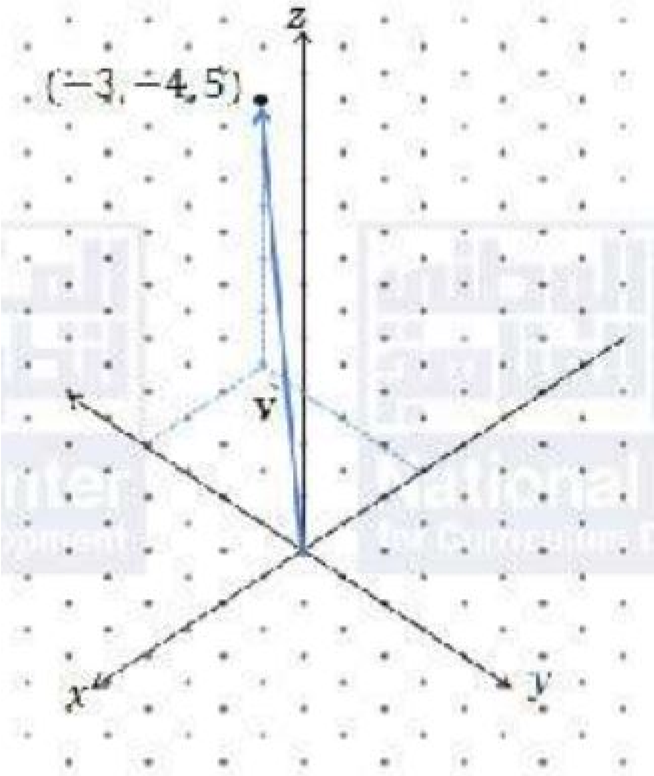
A(12,8,−5),B(−3,6,7)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=225+4+144=373N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(12−32,8+62,−5+72)=(92,7(,1

(7) (6−,3,2),(8,4−,5−)

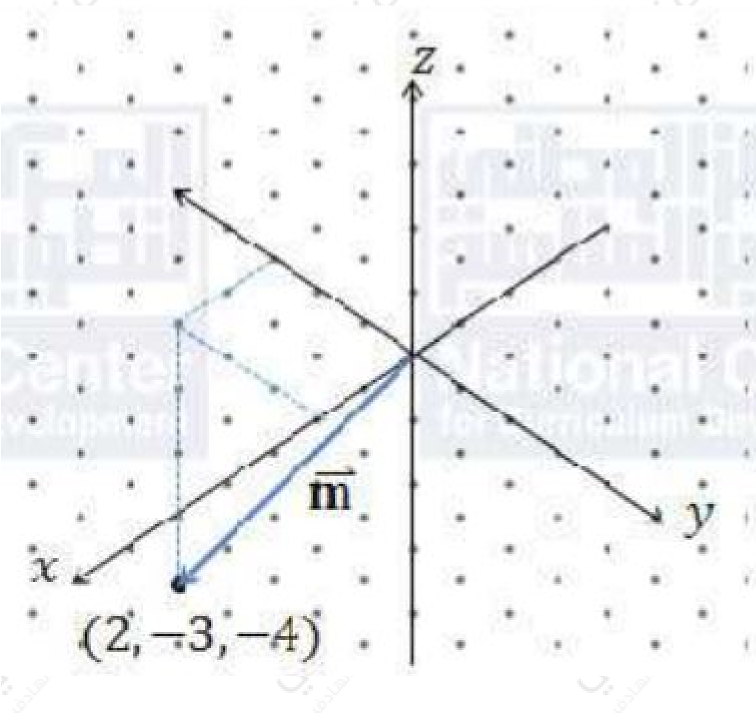
A(−5,−8,4),B(3,2,−6)AB=(x2−x1)2+(y2−y1)2+(z2−z1)2=64+100+100=264=266N=(x1+x22,y1+y22,z1+z22)=(−5+32,−8+22,4−6(2)=(−1,−3,−1

أمثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

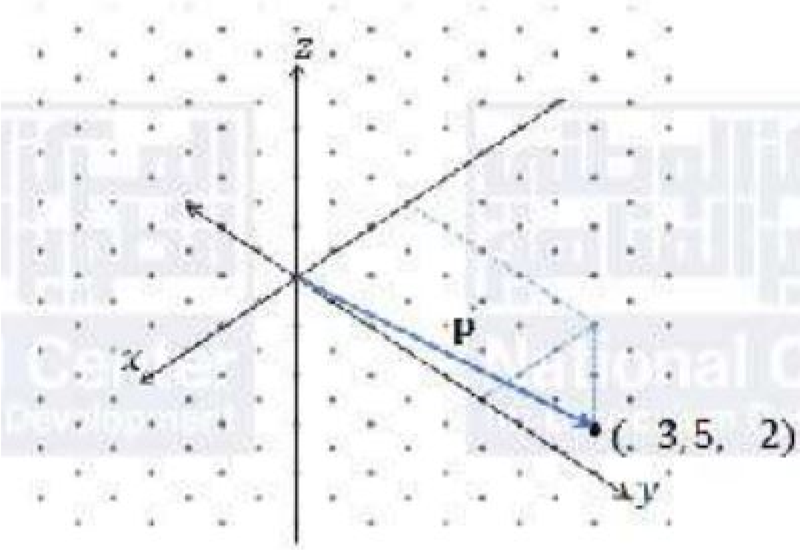
8) $\vec{v}=\langle -3,-4,5\rangle$



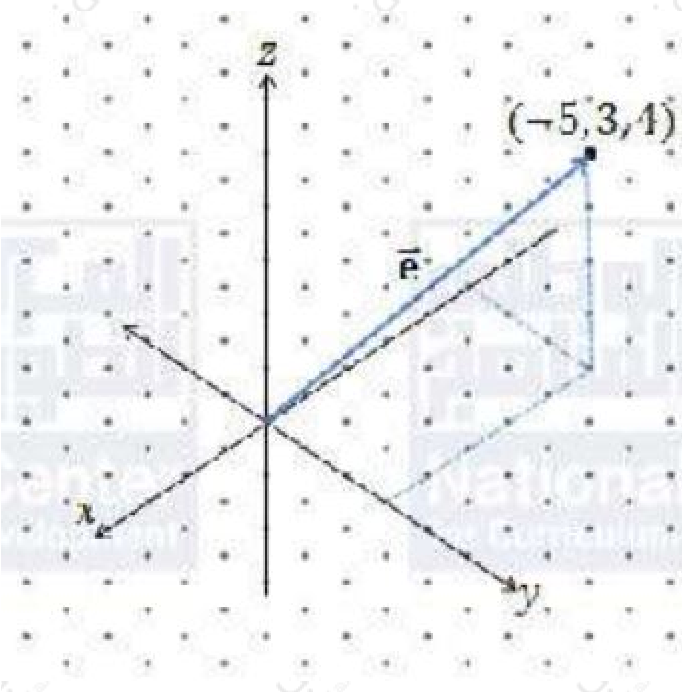
9) $\vec{m}=\langle 2,-3,-4\rangle$



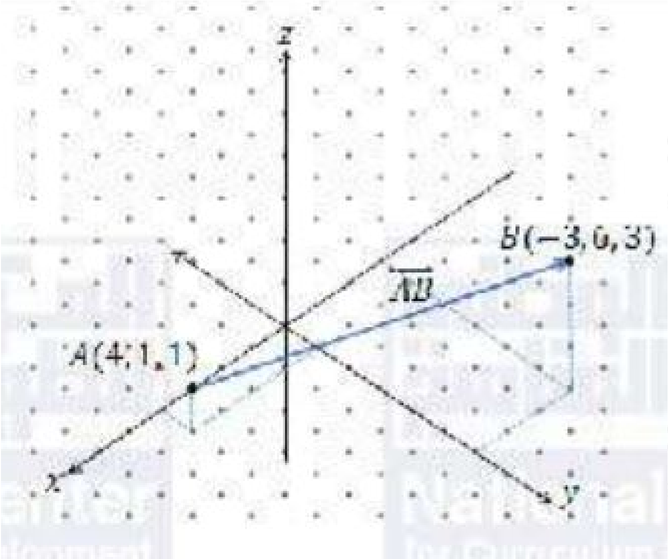
10) $\vec{p}=\langle -3,5,-2\rangle$



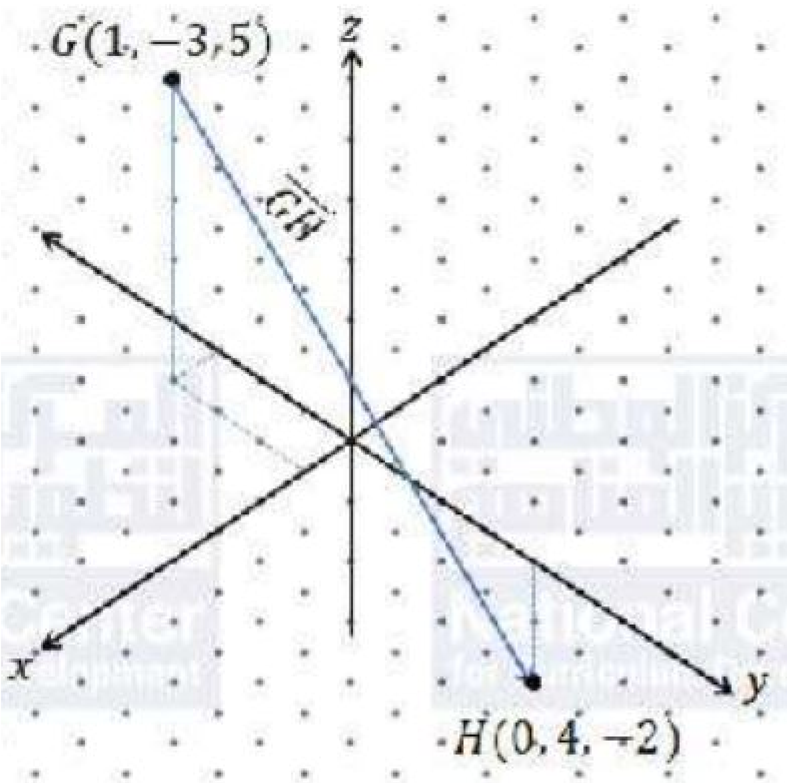
11) $\vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$



12) $\overrightarrow{AB}: A(4,1,1), B(-3,6,3)$



13) $\vec{GH}: G(1,-3,5), H(0,4,-2)$



أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه $\vec{AB}$ الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

14) $A(4,6,9), B(-3,2,5)$

$\vec{AB}=\langle -3-4, 2-6, 5-9\rangle=\langle -7,-4,-4\rangle$ $|\vec{AB}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=\sqrt{49+16+16}=\sqrt{81}=9$

(A(−8,5,7),B(6,3,2) (15

AB→=⟨6−(−8),3−5,2−7⟩=⟨14,−2,−5⟩|AB→|=v12+v22+v32=196+4+25=225=15

(A(12,−5,4),B(4,1,−1) (16

AB→=⟨4−12,1−(−5),−1−4⟩=⟨−8,6,−5⟩|AB→|=v12+v22+v32=64+36+25=125=55

(A(24,−8,10),B(10,6,3) (17

AB→=⟨10−24,6−(−8),3−10⟩=⟨−14,14,−7⟩|AB→|=v12+v22+v32=196+196+49=441=21

(18) إذا كان OAB مثلثاً فيه: OA→=a→,AB→=b→، والنقطة C هي منتصف AB→، فأكتب المتجه OC→ بدلالة a→ وb→.

OC¯=OA→+AC→=a→+12AB→=a→+12(b→−a→)=12a→+12b→=12(a→→+b)

إذا كان: e→=⟨−3,9,−4⟩,f→=5i^−3j^+7k^,g→=⟨−1,8,−5⟩، فأجد كلاً مما يأتي:

(3e→+4f→ (19

3e→+4f→=3⟨−3,9,−4⟩+4⟨5,−3,7⟩=⟨−9,27,−12⟩+⟨20,−12,28⟩=⟨11,15,16⟩

(e→+f→−3g→ (20

e→+f→−3g→=⟨−3,9,−4⟩+⟨5,−3,7⟩−3⟨−1,8,−5⟩=⟨5,−18,18⟩

(4e→−2f→+3g→ (21

4e→−2f→+3g→=4⟨−3,9,−4⟩−2⟨5,−3,7⟩+3⟨−1,8,−5⟩=⟨−25,66,−45⟩

(2e→+7f→−2g→ (22

⟨2e→+7f→−2g→=2⟨−3,9,−4⟩+7⟨5,−3,7⟩−2⟨−1,8,−5⟩=⟨31,−19,51

إذا كانت: A(−1,6,5),B(0,1,−4),C(2,1,1) نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً مما يأتي:

(23) متجه موقع كل من النقاط: A وB وC.

⟨OA→=⟨−1,6,5⟩,OB→=⟨0,1,−4⟩,OC→=⟨2,1,1

(24) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A.

⟨BA→=OA→−OB→=⟨−1,6,5⟩−⟨0,1,−4⟩=⟨−1,5,9

(25) متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B.

⟨CB→=OB→−OC→=⟨0,1,−4⟩−⟨2,1,1⟩=⟨−2,0,−5

(26) المسافة بين النقطة C والنقطة B.

BC→|=v12+v22+v32=4+0+25=29|

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

(g→=⟨5,7,−1⟩ (27

^g→=5i^+7ȷ^−k

(ST→:S(1,0,−5),T(2,−2,0) (28

^ST→=(2−1)i^+(−2−0)ȷ^+(0−(−5))k^=ı^−2ȷ^+5k

(a→+3b→:a→=1i^+2j^−4k^,b→=4i^−3j^+5k^ (29−

^a→+3b→=−i^−2j^+4k^+12i^−9ȷ^+15k^=11i^−11ȷ^+19k−

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

(4i^+3j^ (30−

^v→=−4i^+3ȷ^|v→|=16+9=5v^=15v→=−45i^+35ȷ

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(143i^−24j^ (31

v→=143i^−24ȷ^|v→|=20449+576=21025=145v^=1145v→=1431
^45i^−24145ı

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(72i^+33j^+56k^ (32−

v→=−72i^+33ȷ^+56k^|v→|=5184+1089+3136=9409=97v^=197
^v→=−7297i^+3397ı^+5697k

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(33) (11138)

v→=(11138)|v→|=121+169+64=354v^=1354v→=(113541335483
(54

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(34) (5−4−2)

(v→=(5−4−2)|v→|=25+16+4=45=35v^=135v→=(535−435−235

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه v→

(n→=⟨−2,0,3⟩ (35

⟨n→=⟨−2,0,3⟩|n→|=4+0+9=13n^=113n→=⟨−213,0,313

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه n→

(36) إذا كان: a→=−3i^+4j^+12k^,b→=7i^+39j^−2k^، وكان: 3a→+cb→=−23i^−66j^+40k^، فأجد قيمة c.

3a→+cb→=3(−3i^+4ȷ^+12k^)+c(7i^+39j^−2k^)=(−9+7c)i^+(1
2+39c)ȷ^+(36−2c)k^)⇒−23i^−66j^+40k^=(−9+7c)ı^+(12+39c)
(^ȷ^+(36−2c)k

في هذاه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

9+7c=−23,12+39c=−66,36−2c=40π−

وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه c=−2

(37) إذا كان: (s→=(2w+47−4),t→=(3v2 :، وكان: (ks→−4t→=(631w، فأجد قيمة كل من v وw وk.

ks→−4t→=k(2w+47−4)−4(3v2)=(2k−12k(w+47)−4v−4k−8)⇒(631 w)=(2k−12k(w+47)−4v−4k−8)⇒2k−12=6⇒k=9−4k−8=w⇒w=−36 −8=−44k(w+47)−4v=31⇒9(−44+47)−4v=31⇒v=−1

(38) إذا كان:
→m→=⟨4,1,−2⟩,n→=⟨6,2,−3⟩,p→=⟨2,a,−1⟩,5m→+2p→=4n، فما قيمة الثابت a؟

⟨5m→+2p→=4n→5⟨4,1,−2⟩+2⟨2,a,−1⟩=4⟨6,2,−3⟩⟨24,5+2a,−12⟩=⟨24,8,−12

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

5+2a=8⇒a=32

(39) إذا كان: v→=⟨u−3,u+1,u−2⟩، وكان: |v→|=17| ، فما قيمة u ؟

|v→|=v12+v22+v32=(u−3)2+(u+1)2+(u−2)2=17| الأقواس وفك الطرفين بتربيع u2−6u+9+u2+2u+1+u2−4u+4=2893u2−8u−275=0u=8±3 3642(3)=8±586u=−506=−253 أو u=666=11

(40) إذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما:
g→=⟨−2,c+1,−8⟩ وh→=⟨c−1,−4,c+2⟩، على الترتيب، فأجد قيمة c، علماً بأن: |GH→|=19، وأن: c>0.

GH→=⟨c−1−(−2),−4−(c+1),c+2−(−8)⟩=⟨c+1,−5−c,c+10⟩|GH→|=(c+1)2+(−5−c)2+(c+10)2=19 الأقواس وفك الطرفين بتربيع c2+2c+1+25 +10c+c2+c2+20c+100=361⇒3c2+32c−235=0⇒c=−32±38446= −32±626c=−946=−473 أو c=306=5

ولكن $c>0$ إذن، $c=5$