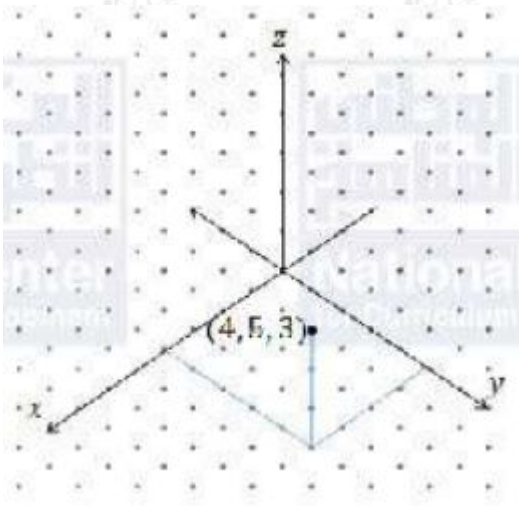


أدرب وأحل المسائل

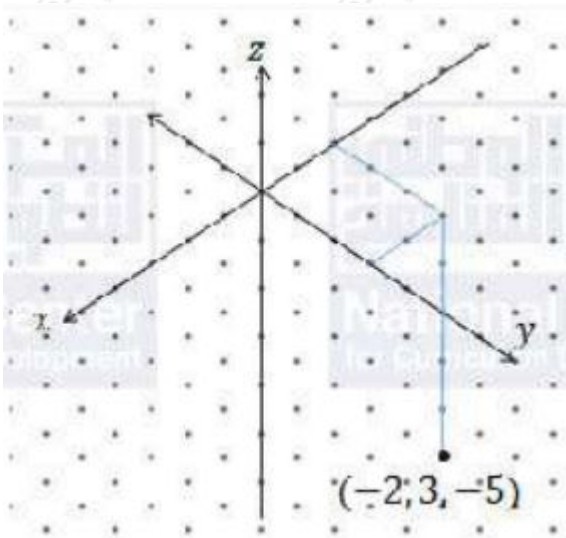
المتجهات في الفضاء

أعین کلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

(1) $(4, 5, 3)$

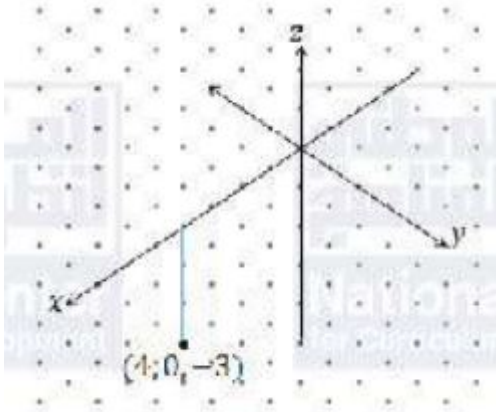


(2) $(-2, 3, -5)$



(3) $(3, -4, 0)$

منهاجي



أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

(4) $(5, 4, 2), (2, 8, -3)$

$$A(3, -2, 8), B(5, 4, 2) \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

$$N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = \left(\frac{3 + 5}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{8 + 2}{2} \right) = (4, 1, 5)$$

(5) $(5, 3, -2), (2, 7, 0)$

$$A(-2, 7, 0), B(2, -5, 3) \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{16 + 144 + 9} = \sqrt{169} = 13$$

$$N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{7 - 5}{2}, \frac{0 + 3}{2} \right) = (0, 1, 3/2)$$

(6) $(3, 6, 7), (5, -12, 8)$

$$A(12, 8, -5), B(-3, 6, 7) \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{225 + 4 + 144} = \sqrt{373}$$

$$N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = \left(\frac{12 - 3}{2}, \frac{8 + 6}{2}, \frac{-5 + 7}{2} \right) = (9/2, 7, 1)$$

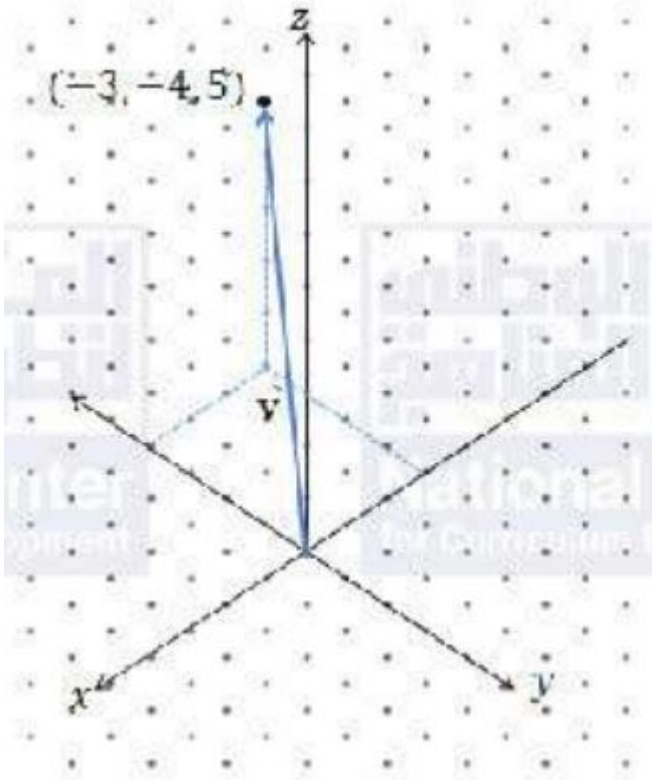
(7) $(6, -3, 2), (8, 4, -5)$

$$A(-5, -8, 4), B(3, 2, -6) \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{64 + 100 + 100} = \sqrt{264} = 2\sqrt{66}$$

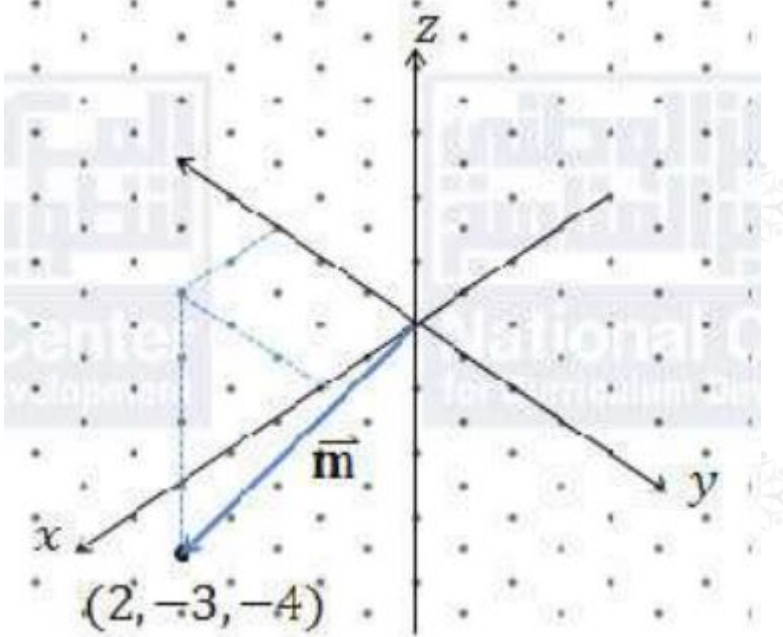
$$N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) = \left(\frac{-5 + 3}{2}, \frac{-8 + 2}{2}, \frac{4 - 6}{2} \right) = (-1, -3, -1)$$

أمثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

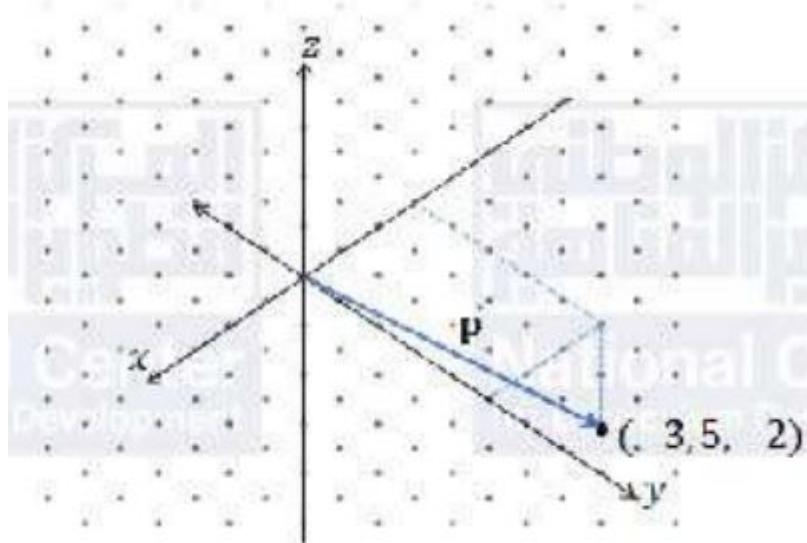
$$(\vec{v} = \langle -3, -4, 5 \rangle) \quad (8)$$



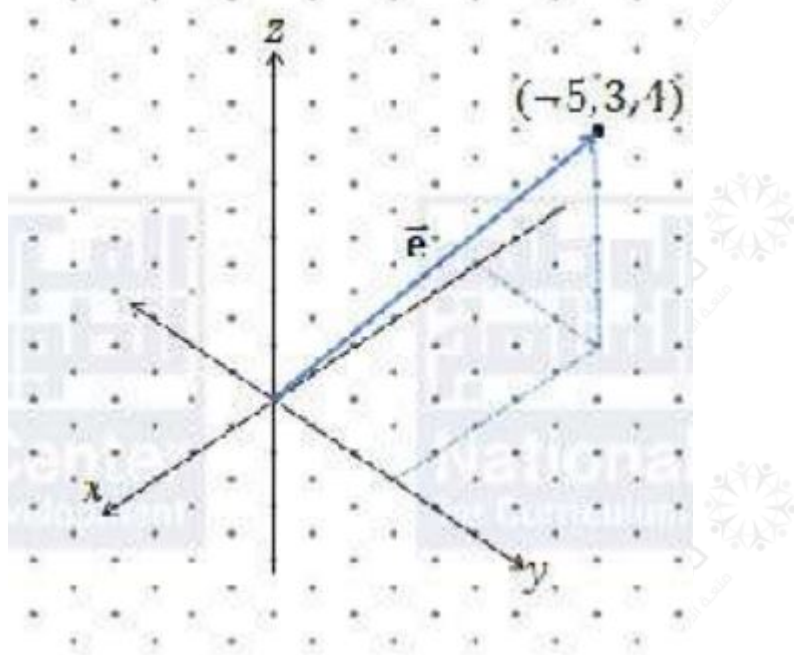
$$(\vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle) \quad (9)$$



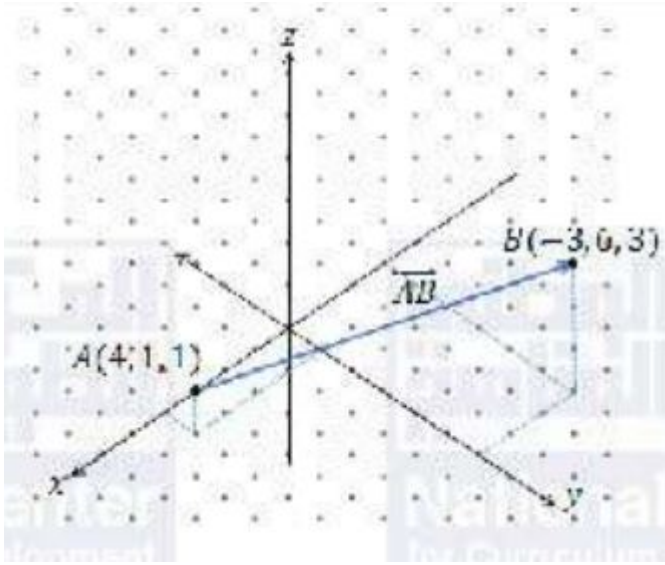
$$(\vec{p} = \langle -3, 5, -2 \rangle) \quad (10)$$



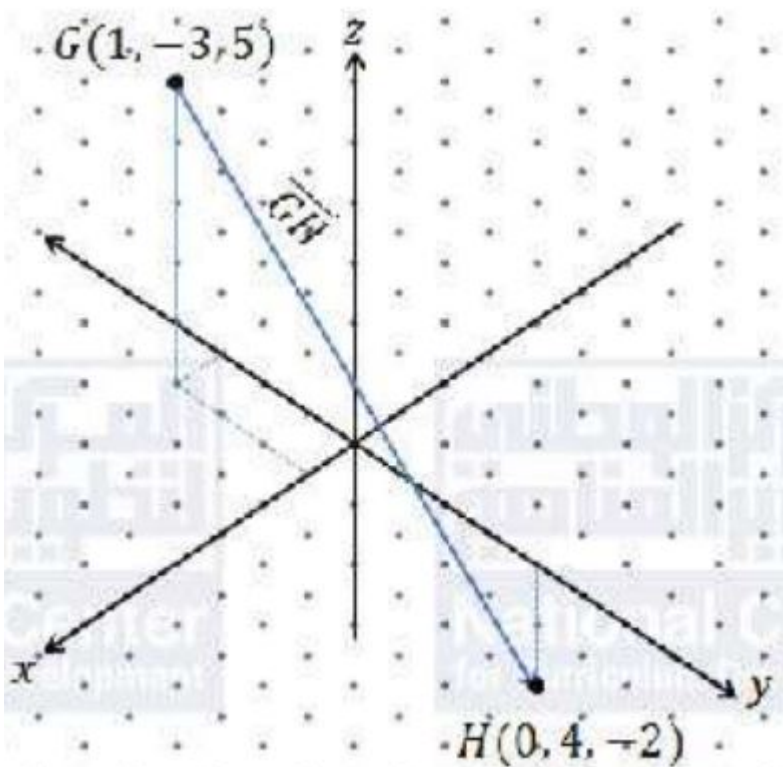
$$(\vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) \quad (11)$$



$$(\vec{AB} : A(4, 1, 1), B(-3, 6, 3)) \quad (12)$$



(GH→:G(1,-3,5),H(0,4,-2) (13



أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه \vec{AB} الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

(A(4,6,9),B(-3,2,5) (14

$$\vec{AB} = \langle -3-4, 2-6, 5-9 \rangle = \langle -7, -4, -4 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$$

$$(A(-8,5,7), B(6,3,2)) \quad (15)$$

$$\vec{AB} = \langle 6 - (-8), 3 - 5, 2 - 7 \rangle = \langle 14, -2, -5 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{14^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{196 + 4 + 25} = \sqrt{225} = 15$$

$$(A(12,-5,4), B(4,1,-1)) \quad (16)$$

$$\vec{AB} = \langle 4 - 12, 1 - (-5), -1 - 4 \rangle = \langle -8, 6, -5 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 36 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$(A(24,-8,10), B(10,6,3)) \quad (17)$$

$$\vec{AB} = \langle 10 - 24, 6 - (-8), 3 - 10 \rangle = \langle -14, 14, -7 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-14)^2 + 14^2 + (-7)^2} = \sqrt{196 + 196 + 49} = \sqrt{441} = 21$$

(18) إذا كان OAB مثلثاً فيه: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, والنقطة C هي منتصف \vec{AB} , فأكتب المتجه \vec{OC} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

إذا كان: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle$, $\vec{f} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$ فأجد كلاً مما يأتي:

$$3\vec{e} + 4\vec{f} \quad (19)$$

$$3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3, 9, -4 \rangle + 4\langle 5, -3, 7 \rangle = \langle -9, 27, -12 \rangle + \langle 20, -12, 28 \rangle = \langle 11, 15, 16 \rangle$$

$$\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} \quad (20)$$

$$\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} = \langle -3, 9, -4 \rangle + \langle 5, -3, 7 \rangle - 3\langle -1, 8, -5 \rangle = \langle 5, -18, 18 \rangle$$

$$4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} \quad (21)$$

$$4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} = 4\langle -3, 9, -4 \rangle - 2\langle 5, -3, 7 \rangle + 3\langle -1, 8, -5 \rangle = \langle -25, 66, -45 \rangle$$

$$2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} \quad (22)$$

$$\langle 2e \rightarrow + 7f \rightarrow - 2g \rightarrow = 2\langle -3, 9, -4 \rangle + 7\langle 5, -3, 7 \rangle - 2\langle -1, 8, -5 \rangle = \langle 31, -19, 51 \rangle$$

إذا كانت: $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4), C(2, 1, 1)$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً مما يأتي:
(23) متجه موقع كل من النقاط: A و B و C.

$$\langle OA \rightarrow = \langle -1, 6, 5 \rangle, OB \rightarrow = \langle 0, 1, -4 \rangle, OC \rightarrow = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

(24) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A.

$$\langle BA \rightarrow = OA \rightarrow - OB \rightarrow = \langle -1, 6, 5 \rangle - \langle 0, 1, -4 \rangle = \langle -1, 5, 9 \rangle$$

(25) متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B.

$$\langle CB \rightarrow = OB \rightarrow - OC \rightarrow = \langle 0, 1, -4 \rangle - \langle 2, 1, 1 \rangle = \langle -2, 0, -5 \rangle$$

(26) المسافة بين النقطة C والنقطة B.

$$|BC \rightarrow| = \sqrt{12 + 22 + 32} = \sqrt{4 + 0 + 25} = \sqrt{29}$$

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

$$g \rightarrow = \langle 5, 7, -1 \rangle \quad (27)$$

$$\hat{g} \rightarrow = 5\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$$

$$(ST \rightarrow : S(1, 0, -5), T(2, -2, 0)) \quad (28)$$

$$\hat{ST} \rightarrow = (2-1)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (0-(-5))\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$(a \rightarrow + 3b \rightarrow : a \rightarrow = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, b \rightarrow = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \quad (29)$$

$$\hat{a} \rightarrow + 3\hat{b} \rightarrow = -\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + 12\hat{i} - 9\hat{j} + 15\hat{k} = 11\hat{i} - 11\hat{j} + 19\hat{k}$$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

$$(4\hat{i} + 3\hat{j}) \quad (30)$$

$$\hat{v} \rightarrow = -4\hat{i} + 3\hat{j} \quad |v \rightarrow| = \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \hat{v} = \frac{1}{5}v \rightarrow = -\frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $v \rightarrow$

$$(143\mathbf{i}^{\wedge} - 24\mathbf{j}^{\wedge}) \quad (31)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = 143\mathbf{i}^{\wedge} - 24\mathbf{j}^{\wedge} \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = \sqrt{20449 + 576} = 21025 = 145\mathbf{v}^{\wedge} = 1145\mathbf{v} \rightarrow = 143\mathbf{i}^{\wedge} - 24\mathbf{j}^{\wedge}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(72\mathbf{i}^{\wedge} + 33\mathbf{j}^{\wedge} + 56\mathbf{k}^{\wedge}) \quad (32)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = -72\mathbf{i}^{\wedge} + 33\mathbf{j}^{\wedge} + 56\mathbf{k}^{\wedge} \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = \sqrt{5184 + 1089 + 3136} = 9409 = 97\mathbf{v}^{\wedge} = 197\mathbf{v} \rightarrow = -72\mathbf{i}^{\wedge} + 33\mathbf{j}^{\wedge} + 56\mathbf{k}^{\wedge}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(33) \quad (11138)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = (11138) \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = \sqrt{121 + 169 + 64} = 354\mathbf{v}^{\wedge} = 1354\mathbf{v} \rightarrow = (113541335483) \quad (54)$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(34) \quad (5-4-2)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = (5-4-2) \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = \sqrt{25 + 16 + 4} = 45 = 35\mathbf{v}^{\wedge} = 135\mathbf{v} \rightarrow = (535-435-235)$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$\mathbf{n} \rightarrow = \langle -2, 0, 3 \rangle \quad (35)$$

$$|\mathbf{n} \rightarrow| = \sqrt{4 + 0 + 9} = 13\mathbf{n}^{\wedge} = 113\mathbf{n} \rightarrow = \langle -213, 0, 313 \rangle$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{n} \rightarrow$

(36) إذا كان: $\mathbf{a} \rightarrow = -3\mathbf{i}^{\wedge} + 4\mathbf{j}^{\wedge} + 12\mathbf{k}^{\wedge}$, $\mathbf{b} \rightarrow = 7\mathbf{i}^{\wedge} + 39\mathbf{j}^{\wedge} - 2\mathbf{k}^{\wedge}$ ، وكان: $3\mathbf{a} \rightarrow + c\mathbf{b} \rightarrow = -23\mathbf{i}^{\wedge} - 66\mathbf{j}^{\wedge} + 40\mathbf{k}^{\wedge}$ ، فأجد قيمة c .

$$3\mathbf{a} \rightarrow + c\mathbf{b} \rightarrow = 3(-3\mathbf{i}^{\wedge} + 4\mathbf{j}^{\wedge} + 12\mathbf{k}^{\wedge}) + c(7\mathbf{i}^{\wedge} + 39\mathbf{j}^{\wedge} - 2\mathbf{k}^{\wedge}) = (-9 + 7c)\mathbf{i}^{\wedge} + (12 + 39c)\mathbf{j}^{\wedge} + (36 - 2c)\mathbf{k}^{\wedge} = -23\mathbf{i}^{\wedge} - 66\mathbf{j}^{\wedge} + 40\mathbf{k}^{\wedge} = (-9 + 7c)\mathbf{i}^{\wedge} + (12 + 39c)\mathbf{j}^{\wedge} + (36 - 2c)\mathbf{k}^{\wedge}$$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$$9+7c=-23, 12+39c=-66, 36-2c=40$$

وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه $c=-2$

(37) إذا كان: $t \rightarrow = (3v, 2)$ ، وكان: $s \rightarrow = (2w+4, 7-4)$ ، فكأن: $ks \rightarrow - 4t \rightarrow = (6, 31)$ ، فأجد قيمة كل من v و w و k .

$$ks \rightarrow - 4t \rightarrow = k(2w+4, 7-4) - 4(3v, 2) = (2k-12k, k(w+4)-4v-4k-8) = (6, 31)$$

$$w) = (2k-12k(w+4)-4v-4k-8) \Rightarrow 2k-12=6 \Rightarrow k=9-4k-8=w \Rightarrow w=-36$$

$$-8 = -44k(w+4)-4v=31 \Rightarrow 9(-44+47)-4v=31 \Rightarrow v=-1$$

(38) إذا كان:

$5m \rightarrow + 2p \rightarrow = 4n \rightarrow$ ، $m \rightarrow = (4, 1, -2)$ ، $n \rightarrow = (6, 2, -3)$ ، $p \rightarrow = (2, a, -1)$ ، فما قيمة الثابت a ؟

$$5m \rightarrow + 2p \rightarrow = 4n \rightarrow \Rightarrow 5(4, 1, -2) + 2(2, a, -1) = 4(6, 2, -3) \Rightarrow (24, 5+2a, -12) = (24, 8, -12)$$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$$5+2a=8 \Rightarrow a=3/2$$

(39) إذا كان: $v \rightarrow = (u-3, u+1, u-2)$ ، وكان: $|v \rightarrow| = 17$ ، فما قيمة u ؟

$$|v \rightarrow| = \sqrt{(u-3)^2 + (u+1)^2 + (u-2)^2} = 17$$

$$u^2 - 6u + 9 + u^2 + 2u + 1 + u^2 - 4u + 4 = 289 \Rightarrow 3u^2 - 8u - 275 = 0$$

$$u = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 3300}}{6} = \frac{8 \pm 58}{6} \Rightarrow u = 11 \text{ أو } u = -5$$

(40) إذا كان متجهها الموقع للنقطة G والنقطة H هما:

$g \rightarrow = (-2, c+1, -8)$ و $h \rightarrow = (c-1, -4, c+2)$ ، على الترتيب، فأجد قيمة c ، علماً بأن: $|GH \rightarrow| = 19$ ، وأن: $c > 0$.

$$GH \rightarrow = (c-1-(-2), -4-(c+1), c+2-(-8)) = (c+1, -5-c, c+10)$$

$$|GH \rightarrow| = \sqrt{(c+1)^2 + (-5-c)^2 + (c+10)^2} = 19$$

$$c^2 + 2c + 1 + 25 + 10c + c^2 + c^2 + 20c + 100 = 361 \Rightarrow 3c^2 + 32c - 235 = 0 \Rightarrow c = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 28350}}{6} = \frac{-32 \pm 173}{6}$$

$$c = 306/6 = 5 \text{ أو } c = -946/6 = -157.67$$

ولكن $c > 0$ إذن، $c = 5$