

مهارات التفكير العليا

المتجهات في الفضاء

(41) أكتشف الخطأ: قالت حنان: "إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإن النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة"، في حين قالت هديل: "النقطة B تقع داخل هذه الكرة"، أي القولين صحيح، مبرراً إجابتي.

بما أن مركز الكرة هو $O(0, 0, 0)$ والنقطة $A(7, -3, 3)$ تقع عليه فإن طول نصف قطرها R حيث:

$$R=OA=(7-0)^2+(-3-0)^2+(3-0)^2=49+9+9=67 \quad OB=(2-0)^2+(-8-0)^2+(-1-0)^2=4+64+1=69$$

بما أن $OB > R$ فإن النقطة B تقع خارج الكرة، ويكون قول حنان هو الصواب.

(42) تبرير: إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأبين أن النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، مبرراً إجابتي.

مركز الكرة هو النقطة C التي تنصف القطر المعطى طرفاه:

$$C=\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-1+17}{2}\right)=(-3, 4, 8)$$

وطول نصف قطر الكرة هو R حيث:

$$R=CK=(-3-(-2))^2+(4-2)^2+(8-17)^2=1+4+81=86$$

الآن نجد كلاً من CJ, CL ونقارنه مع R لمعرفة موقع كل من L, J بالنسبة لهذه الكرة:

$$CL=(2-(-3))^2+(10-4)^2+(3-8)^2=25+36+25=86=R$$

إذن، النقطة L أيضاً تقع على سطح هذه الكرة.

$$CJ=(4-(-3))^2+(-2-4)^2+(7-8)^2=49+36+1=86=R$$

إذن، النقطة J أيضاً تقع على سطح هذه الكرة.

(43) تبرير: تمثل النقاط: $A(2, 3, -1), B(2, 3, 5), C(8, -3, 5)$ ثلاثة من رؤوس مكعب

خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: XY, XZ, YZ .
 أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى، مبرراً إجابتي.

تختلف النقطة B عن النقطة A فقط في الإحداثي z، والفرق بين قيمتي z يساوي 6
 إذن، AB أحد أحرف المكعب، وطول ضلع المكعب 6 وحدات.

أما النقطة C فيزيد إحداثيها x بمقدار 6 وحدات عن الإحداثي x للنقطة B، كما يقل
 إحداثيها y بمقدار 6 عن الإحداثي y للنقطة B (مزاخة عنها 6 وحدات لليسار).

نجد باقي النقاط (الرؤوس) بإحداثيات إزاحات مقدارها 6 وحدات لإحداثيات الرؤوس
 الثلاثة المعطاة.

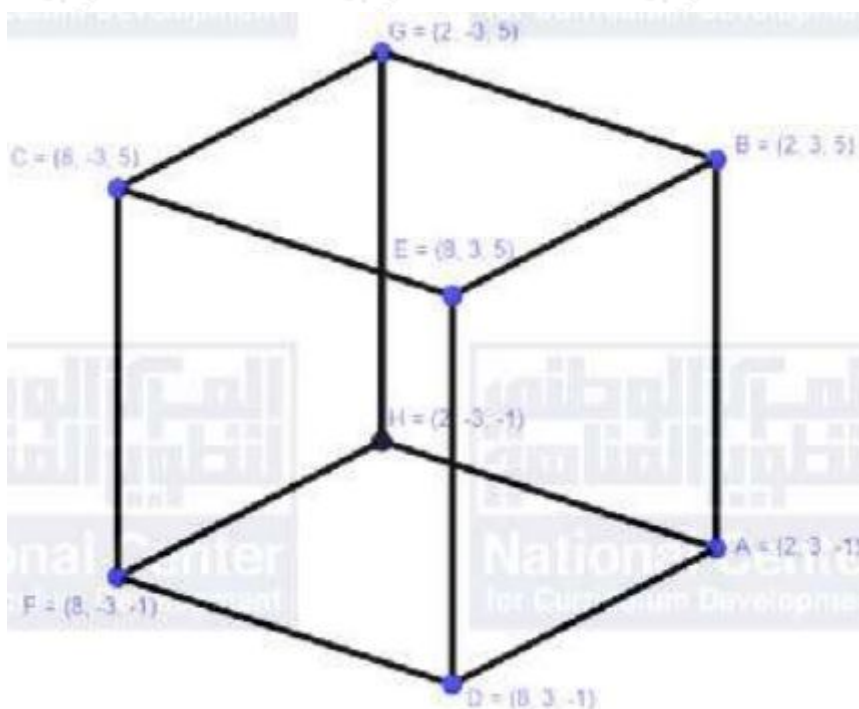
$D(8, 3, -1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

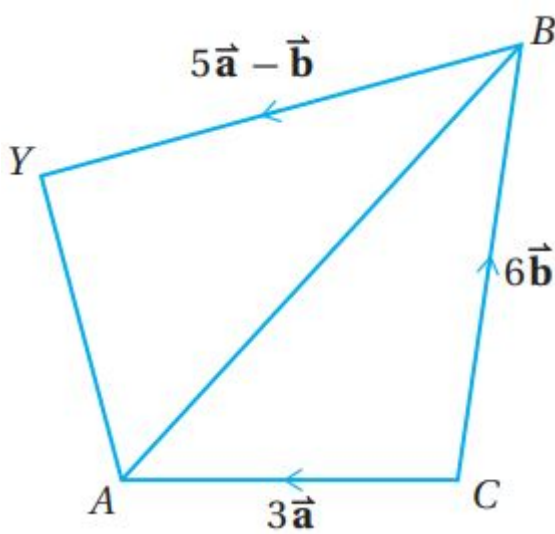
$E(8, 3, 5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

$F(8, -3, -1)$ وذلك بإزاحة النقطة C بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور z السالب.

$G(2, -3, 5)$ وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.

$H(2, -3, -1)$ وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.





(44) تحد: في الشكل الآتي، إذا كان: $\vec{CB} = 6\vec{b}$, $\vec{BY} = 5\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{CA} = 3\vec{a}$ وكانت X تقع على \vec{AB} ، حيث $AX:XB = 1:2$ ، فأثبت أن: $\vec{CX} = 25\vec{CY}$.

$$\begin{aligned} AX:XB = 1:2 &\Rightarrow XB = 2AX \Rightarrow AB = AX + XB = AX + 2AX = 3AX \Rightarrow AX = \frac{1}{3}AB \\ \vec{AX} &= \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{CB}) = \frac{1}{3}(-3\vec{a} + 6\vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{CY} &= \vec{CB} + \vec{BY} = 6\vec{b} + 5\vec{a} - \vec{b} = 5(\vec{a} + \vec{b}) \\ \vec{a} + \vec{b} &= \frac{1}{5}\vec{CY} \\ \vec{CX} &= \vec{CA} + \vec{AX} = 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot \frac{1}{5}\vec{CY} = \frac{2}{5}\vec{CY} \end{aligned}$$

تحد: إذا كانت متجهات الموقع للنقاط M, L, N هي:

$$\vec{m} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}, \vec{l} = 4\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{n} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}$$

عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(45) أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية.

$$\begin{aligned} \vec{LN} &= \langle 1, 13, -12 \rangle & LN &= |\vec{LN}| = \sqrt{1 + 169 + 144} = \sqrt{314} \\ \vec{ML} &= \langle 7, -4, 2 \rangle & ML &= |\vec{ML}| = \sqrt{49 + 16 + 4} = \sqrt{69} \\ \vec{NM} &= \langle -8, -9, 10 \rangle & NM &= |\vec{NM}| = \sqrt{64 + 81 + 100} = \sqrt{245} \end{aligned}$$

$$245 + 69 = 314 \quad \text{إذن: } LN^2 = ML^2 + NM^2$$

فإن $\triangle LMN$ قائم الزاوية في M (بعكس نظرية فيثاغورس).

(46) أجد مساحة المثلث LMN.

مساحة المثلث في A حيث:

$$A = \frac{1}{2}(ML)(NM) = \frac{1}{2} \sqrt{69} \sqrt{245} = \frac{1}{2} \sqrt{16905} = \frac{1}{2} \cdot 130 = 65$$