

أتحقق من فهمي

المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (127):

إذا كان: $G(7,5,-11), H(4,4,-4), K(4,5,3), L(7,7,3)$ ، فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

(a) \vec{GH}, \vec{KL}

$$\vec{GH} = \langle -3, -1, 7 \rangle \quad \vec{KL} = \langle 3, 2, 0 \rangle$$

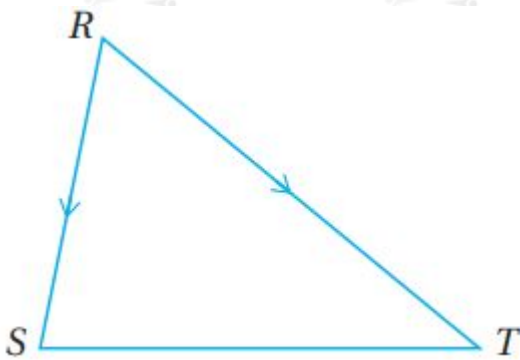
نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\vec{GH} = c\vec{KL}$ صحيحة، ونستنتج أن \vec{GH}, \vec{KL} غير متوازيين.

(b) \vec{GL}, \vec{HK}

$$\vec{GL} = \langle 0, 2, 14 \rangle \quad \vec{HK} = \langle 0, 1, 7 \rangle$$

نلاحظ أن $\vec{GL} = 2\vec{HK}$ ، ونستنتج أن $\vec{GL} \parallel \vec{HK}$

أتحقق من فهمي صفحة (129):



في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\vec{RS} = 4\vec{a}$ ، والنقطة U منتصف \vec{RS} ، والنقطة V منتصف \vec{RT} ، فأثبت أن $\vec{ST} \parallel \vec{UV}$.

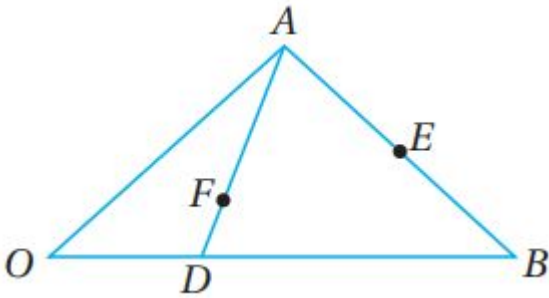
$$\vec{UV} = \vec{UR} + \vec{RV} = 12(-4\vec{a}) + 12(6\vec{b}) = 3\vec{b} - 2\vec{a}$$

$$\vec{ST} = \vec{SR} + \vec{RT} = (-4\vec{a} + 6\vec{b}) = 2(3\vec{b} - 2\vec{a})$$

إذن، $\vec{ST} = 2\vec{UV}$ ، ومنه المتجهان \vec{ST}, \vec{UV} متوازيان.

أتحقق من فهمي صفحة (130):

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB.



إذا كان: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ ، وكانت النقطة D تقع على \vec{OB} ، والنقطة E منتصف \vec{AB} ، والنقطة F تقع على \vec{AD} ، حيث: $\vec{OF} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b})$ ، فأثبت أن O، F، و E تقع على استقامة واحدة.

$$\vec{OE} = \vec{OB} + \vec{BE} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{BA}) = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{BO} + \vec{OA}) = \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{OF} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) \implies \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{OF} \implies \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{OE} \implies \vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{OE}$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن:

$$5\vec{OF} = 2\vec{OE} \implies \vec{OF} = \frac{2}{5}\vec{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين \vec{OF} ، \vec{OE} متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن النقاط O، E، F تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

أتحقق من فهمي صفحة (132):

أجد معادلة متجهة للمستقيم α الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ، ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \implies \vec{r} = \langle 0, -6, 9 \rangle + t\langle 1, -4, -5 \rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة (133):

أجد معادلة متجهة للمستقيم α المار بالنقطتين: $M(3, 7, -9)$ ، $N(2, -4, 3)$.

$$NM \rightarrow = \langle 3-2, 7-(-4), -9-3 \rangle = \langle 1, 11, -12 \rangle$$

$$r \rightarrow = r \rightarrow 0 + tv \rightarrow \Rightarrow r \rightarrow = \langle 3, 7, -9 \rangle + \langle t, 11, -12 \rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة (136):

تمثل: $\hat{r} \rightarrow = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم ا:

(a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم ا.

$$\hat{r} \rightarrow = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

نبحث عن قيمة ل t تحقق:

$$39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

$$39 = 11 + 7t \Rightarrow t = 4$$

$$-3 = 5 - 2t \Rightarrow t = 4$$

$$14 = -6 + 5t \Rightarrow t = 4$$

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه ($t=4$)، فإن القطعة التي متجه موقعها $39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k}$ وهي النقطة $(39, -3, 14)$ تقع على المستقيم ا لأنها تنتج من تعويض $t=4$ في معادلتها.

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة: $t = -3$.

$$t = -3 \Rightarrow r \rightarrow = (11+7(-3))\hat{i} + (5-2(-3))\hat{j} + (-6+5(-3))\hat{k} = -10\hat{i} + 11\hat{j} - 21\hat{k}$$

(c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ تقع على المستقيم ا، فما قيمة v؟

متجه الموقع للنقطة $(v, -3v, 5v-1)$ هو $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k}$

$$v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

$$v = 11 + 7t \dots (1)$$

$$-3v = 5 - 2t \dots (2)$$

$$5v - 1 = -6 + 5t \dots (3)$$

$$(1) \times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow v = -3$$

تتحقق من أن $v = -3, t = -2$ تحققان المعادلة (3)

$$16 - = 16 - (2 -)6 + 5 - = 1 - (3 -)5$$

إذن، قيمة v التي تجعل النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ واقعة على المستقيم ا هي: $v = -3$

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

أتحقق من فهمي صفحة (136):

إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t \langle 1, 11, -12 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u \langle 4, -6, 3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأحدد إذا كان المستقيمان: l_1, l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v}_1 = \langle 1, 11, -12 \rangle$

اتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{v}_2 = \langle 4, -6, 3 \rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي \vec{r} من معادلتَي المستقيمين:

$$\begin{aligned} t \langle 1, 11, -12 \rangle &= \langle -30, -6, 30 \rangle + u \langle 4, -6, 3 \rangle \\ 3 + t &= -30 + 4u \Rightarrow t - 4u = -33 \dots\dots\dots (1) \\ 7 + 11t &= -6 - 6u \Rightarrow 11t + 6u = -13 \dots\dots\dots (2) \\ -9 - 12t &= 30 + 3u \Rightarrow 12t + 3u = -39 \dots\dots\dots (3) \\ 3 \times (1) + 2 \times (2) &\Rightarrow 25t = -125 \Rightarrow t = -5, \\ u &= 7 \end{aligned}$$

نتحقق من أن $u=7, t=-5$ تحققان المعادلة (3)

$$39 - = 39 - 39 - ? = (7)3 + (-5)12$$

بما أن قيمة t وقيمة u حققنا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان.

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=-5$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle - 5 \langle 1, 11, -12 \rangle = \langle -2, -48, 51 \rangle$$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2, -48, 51)$

أتحقق من فهمي صفحة (138):

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(0, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت

طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2, 0, 0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8, 15, 16)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22, 24, 48)$. هل خطا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

اتجاه الطائرة الأولى هو اتجاه الطائرة الأولى هو
 $\vec{v}_1 = \langle 8 - 0, 15 - 0, 16 - 0 \rangle = \langle 8, 15, 16 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح: $\langle 1, 1, 2 \rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{r} = \langle 0, 7, 0 \rangle + t \langle 1, 1, 2 \rangle$

اتجاه الثانية هو $\vec{v}_2 = \langle 22 - (-2), 24 - 0, 48 - 0 \rangle = \langle 24, 24, 48 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1, 1, 2 \rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r} = \langle -2, 0, 0 \rangle + u \langle 1, 1, 2 \rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.