

## أدرب وأحل المسائل

### المتجهات في الفضاء

أحدد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كل مما يأتي:

(1)  $\langle 20, -15, 10 \rangle, \langle 8, 12, 24 \rangle$

نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي  $k$  بحيث  $\langle 8, 12, 24 \rangle = k \langle 20, -15, 10 \rangle$   
إذن، المتجهان غير متوازيين.

(2)  $\langle 12, -16, -9 \rangle, \langle 36, -48, -27 \rangle$

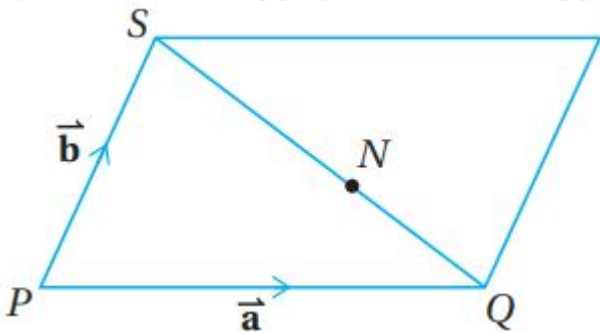
نلاحظ أن  $\langle 36, -48, -27 \rangle = 3 \langle 12, -16, -9 \rangle$   
إذن، المتجهان متوازيان.

(3)  $\langle 1, 13, -3 \rangle, \langle 4, 10, -6 \rangle$

نلاحظ عدم وجود عدد حقيقي  $k$  بحيث  $\langle 4, 10, -6 \rangle = k \langle 1, 13, -3 \rangle$   
إذن، المتجهان غير متوازيين.

(4)  $\langle 14, 56, -21 \rangle, \langle 8, 32, -12 \rangle$

نلاحظ أن  $\langle 14, 56, -21 \rangle = 7 \langle 2, 8, -3 \rangle$  و  $\langle 8, 32, -12 \rangle = 4 \langle 2, 8, -3 \rangle$   
إذن، المتجهان متوازيان.



يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع PQRS، الذي تقع فيه النقطة N على SQ، حيث:  
 $\vec{PQ} = \vec{a}, \vec{PS} = \vec{b}, \text{ و } SN:NQ = 3:2$

(5) أكتب  $\vec{SQ}$  بدلالة  $\vec{a}, \vec{b}$ .

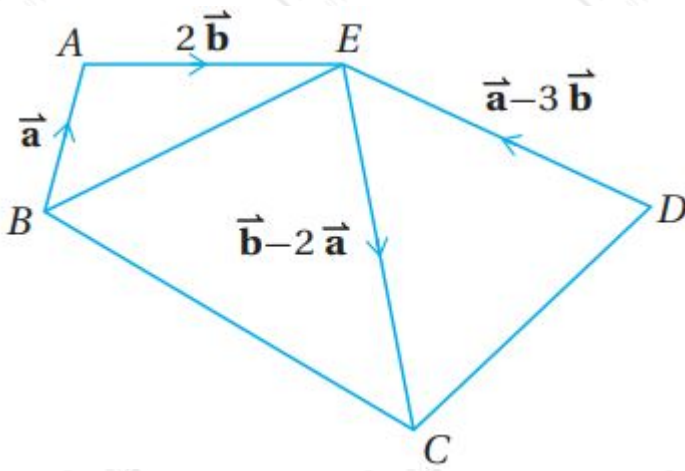
$$\rightarrow SQ \rightarrow = SP \rightarrow + PQ \rightarrow = -b \rightarrow + a \rightarrow = a \rightarrow - b$$

(6) أكتب  $\rightarrow NR$  بدلالة  $a, b \rightarrow$ .

$$NQSN = 23 \Rightarrow NQ = 23SN \Rightarrow SQ = SN + NQ = SN + 23SN = 53SN \Rightarrow SQ = 53SN \Rightarrow SN = 35SQ \Rightarrow NQ = 25SQ$$

وبما أن الشكل متوازي أضلاع فإن:  $\rightarrow QR \rightarrow = PS \rightarrow = b$

$$\rightarrow NR \rightarrow = NQ \rightarrow + QR \rightarrow = 25SQ \rightarrow + QR \rightarrow = 25(a \rightarrow - b \rightarrow) + b \rightarrow = 25a \rightarrow + 35b$$

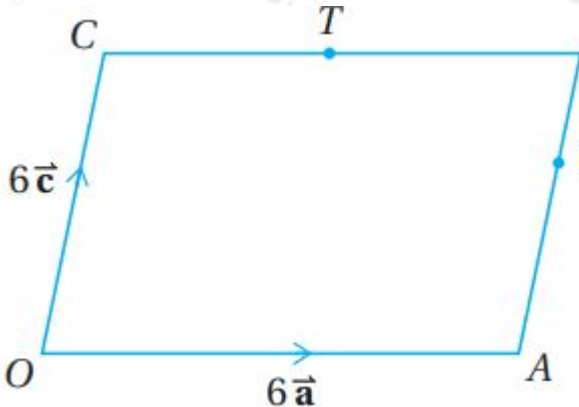


(7) معتمداً المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أثبت أن BEDC متوازي أضلاع.

$$BE \rightarrow = BA \rightarrow + AE \rightarrow = a \rightarrow + 2b \rightarrow \dots \dots \dots (1) \quad CD \rightarrow = CE \rightarrow + ED \rightarrow = -(b \rightarrow - 2a \rightarrow) - (a \rightarrow - 3b \rightarrow) = a \rightarrow + 2b \rightarrow \dots \dots \dots 2 \Rightarrow BE \rightarrow = CD$$

إذن، الضلعان  $BE, CD$  متوازيين ولهما الطول نفسه، وهذا يعني أن الشكل BEDC متوازي أضلاع.

ويمكن إثبات المطلوب بطريقة أخرى بإيجاد المتجهين  $\rightarrow BC, ED$  وبيان تساويهما.



(8) في متوازي الأضلاع OABC المجاور، والنقطة  $T$  هي منتصف الضلع  $CB$ ، والنقطة  $U$  تقسم  $AB$  بنسبة  $2:1$ ، إذا مد الضلع  $OA$  على استقامته إلى النقطة  $X$ ، حيث:  $OA = AX$ ، فأثبت أن  $T, U, X$  تقع على استقامة واحدة.

$$\begin{aligned} \vec{XT} &= \vec{XO} + \vec{OT} = \vec{XO} + (\vec{OC} + \vec{CT}) = -12\vec{a} + (6\vec{c} + 3\vec{a}) = 6\vec{c} - 9\vec{a} \\ &= 3(2\vec{c} - 3\vec{a}) \Rightarrow 2\vec{c} - 3\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{XT} \\ \vec{XU} &= \vec{XA} + \vec{AU} = \vec{XA} + 23\vec{AB} \\ &= -6\vec{a} + 23(6\vec{c}) = 4\vec{c} - 6\vec{a} = 2(2\vec{c} - 3\vec{a}) = 2\left(\frac{1}{3}\vec{XT}\right) \Rightarrow \vec{XU} = \frac{2}{3}\vec{XT} \end{aligned}$$

إذن،  $\vec{XU}, \vec{XT}$  متوازيان، وبما أنهما منطلقان من النقطة نفسها  $X$ ، فإن النقاط  $T, U, X$  تقع على استقامة واحدة.

أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه  $\vec{a}$ ، ويمر بنقطة متجه الموقع لها  $\vec{b}$  في كل مما يأتي:

$$(9) \quad \vec{a} = -7\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + t(-7\vec{i} + \vec{j})$$

$$(10) \quad \vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = -2\vec{i} + 8\vec{k}$$

$$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = -2\vec{i} + 8\vec{k} + t(-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$(11) \quad \vec{a} = \langle 4, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 9, -2 \rangle$$

$$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \langle 9, -2 \rangle + t\langle 4, 3 \rangle$$

$$(12) \quad \vec{a} = \langle 0, -1, 3 \rangle, \vec{b} = \langle 10, 3, -6 \rangle$$

$$\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \langle 10, 3, -6 \rangle + t\langle 0, -1, 3 \rangle$$

أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

$$(13) \quad (1, 3, 0), (6, 10, 3)$$

$$\vec{v} = \langle 10 - 1, 3 - 0, -6 - 3 \rangle = \langle 9, 3, -9 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 1, 3, 0 \rangle + t\langle 9, 3, -9 \rangle$$

$$(14) \quad (1, 4, 29), (6, 9, 11)$$

$$\vec{v} = \langle 11 - 1, -6 - 4, 9 - 29 \rangle = \langle 10, -10, -20 \rangle$$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 10 دون التأثير على اتجاهه:  $\langle v \rightarrow = \langle 1, -1, -2 \rangle$

معادلة المستقيم:  $\langle r \rightarrow = \langle 1, 4, 29 \rangle + t \langle 1, -1, -2 \rangle$

$$(15) (12, 23, -26), (6, 30, -30)$$

اتجاه المستقيم:  $\langle v \rightarrow = \langle -30 - (-26), -6 - (-12), 30 - 23 \rangle = \langle -4, 6, 7 \rangle$

معادلة المستقيم:  $\langle r \rightarrow = \langle -26, -12, 23 \rangle + t \langle -4, 6, 7 \rangle$

$$(16) (7, -10, 5), (2, 9, -1)$$

اتجاه المستقيم:  $\langle v \rightarrow = \langle -2 - 10, 9 - 5, 1 - (-7) \rangle = \langle -12, 4, 8 \rangle$

ويمكن تبسيطه بقسمته على 4 إلى  $\langle 3, 1, 2 \rangle$

معادلة المستقيم:  $\langle r \rightarrow = \langle 10, 5, -7 \rangle + t \langle -3, 1, 2 \rangle$

(17) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\langle r \rightarrow = \langle 4, 4, -7 \rangle + u \langle -1, 3, 1 \rangle, \langle r \rightarrow = \langle -2, 2, -1 \rangle + t \langle 1, 2, -1 \rangle$$

نساوي  $r \rightarrow$  في معادتي المستقيمين:

$$t \langle 1, 2, -1 \rangle = \langle 4, 4, -7 \rangle + u \langle -1, 3, 1 \rangle - 2 + t = 4 - u \Rightarrow t + u = 6 \dots \dots \dots + \langle 1, -2, 2 \rangle$$

$$\dots \dots (1) 2 + 2t = 4 + 3u \Rightarrow 2t - 3u = 2 \dots \dots \dots (2) -1 - t = -7 + u \Rightarrow t + u = 6 \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots (3) 3 \times (1) + (2) \Rightarrow 5t = 20 \Rightarrow t = 4, u = 2$$

نلاحظ أن المعادلة (3) هي المعادلة (1) نفسها فهي متحققة لقيمتي  $t=4, u=2$

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض  $t=4$  في معادلة المستقيم الأول (أو  $u=2$  في معادلة الثاني):

$$\langle r \rightarrow = \langle -2, 2, -1 \rangle + 4 \langle 1, 2, -1 \rangle = \langle 2, 10, -5 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي:  $(5, -2, 10)$

يمر المستقيم  $l_1$  بالنقطتين:  $E, F$ ، ويمر المستقيم  $l_2$  بالنقطتين:  $G, H$ . أوجد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة

التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

$$(E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14), G(8, -1, -8), H(2, 5, 1)) \quad (18)$$

$$\langle EF \rightarrow = \langle -14, 14, 21 \rangle \Rightarrow v \rightarrow 1 = \langle -2, 2, 3 \rangle \quad \langle GH \rightarrow = \langle -6, 6, 9 \rangle \Rightarrow v \rightarrow 2 = \langle -2, 2, 3 \rangle$$

نلاحظ أن  $v \rightarrow 1 = v \rightarrow 2$  فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

$$(E(3, 7, -9), F(2, -4, 3), G(-30, -6, 30), H(-26, -12, 33)) \quad (19)$$

$$\langle EF \rightarrow = \langle -1, -11, 12 \rangle = v \rightarrow 1 \quad \langle HG \rightarrow = \langle 21, 35, -49 \rangle \Rightarrow v \rightarrow 2 = \langle 3, 5, -7 \rangle$$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي  $k$  يحقق  $v \rightarrow 1 = kv \rightarrow 2$  فالمتجهان وكذلك المستقيمان متوازيان.

$$\langle EF \leftrightarrow: r \rightarrow = \langle 3, 7, -9 \rangle + t \langle -1, -11, 12 \rangle \quad \text{معادلة}$$

$$\langle GH \leftrightarrow: r \rightarrow = \langle 3, -21, 20 \rangle + u \langle 3, 5, -7 \rangle \quad \text{معادلة}$$

نساوي  $r \rightarrow$  في معادلتَي المستقيمين ونساوي الإحداثيات المتناظرة:

$$t \langle -1, -11, 12 \rangle = \langle 3, -21, 20 \rangle + u \langle 3, 5, -7 \rangle \quad 3 - t = 3 + 3u \Rightarrow t + 3u = 0 \quad (1) \quad -9 - 3t = 7 + 5u$$

$$7 - 11t = -21 + 5u \Rightarrow 11t + 5u = 28 \quad (2) \quad -9 + 12t = 20 - 7u \Rightarrow 12t + 7u = 29$$

$$\dots (3) \quad -5 \times (1) + 3 \times (2) \Rightarrow 28t = 84 \Rightarrow t = 3, u = -1$$

نُفحص تحقق المعادلة (3) عندما  $t = 3, u = -1$

$$29 = 29 \quad 29 = (1 - 7) + (3)12$$

فالمستقيمان متقاطعان، نجد نقطة التقاطع بتعويض  $t = 3$  في

معادلة  $\leftrightarrow EF$  (أو  $u = -1$  في معادلة  $\leftrightarrow GH$ ):

$$\langle r \rightarrow = \langle 3, 7, -9 \rangle + 3 \langle -1, -11, 12 \rangle = \langle 0, -26, 27 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع المستقيمين هي:  $(0, -26, 27)$

يمر المستقيم  $a$  بالنقطتين:  $(B(10, 5, -7), A(-2, 9, 1))$

(20) أكتب معادلة متجهة للمستقيم  $a$ .

$$\langle AB \rightarrow = \langle 12, -4, -8 \rangle \Rightarrow v \rightarrow = \langle 3, -1, -2 \rangle$$

معادلة المستقيم  $\langle AB \leftrightarrow: r \rightarrow = \langle -2, 9, 1 \rangle + t \langle 3, -1, -2 \rangle$

(21) أبين أن النقطة  $(13, -19, 2)$  تقع على المستقيم ا.

متجه الموقع للنقطة  $(13, -19, 2)$  هو:  $\langle 13, -19, 2 \rangle$

$$\langle 2+3t, 9-t, 1-2t \rangle = \langle 13, -19, 2 \rangle \Rightarrow \begin{cases} 2+3t=13 \\ 9-t=-19 \\ 1-2t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=7 \\ t=7 \\ t=7 \end{cases}$$

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه  $(t=7)$  فإن النقطة  $(13, -19, 2)$  تقع على المستقيم ا لأنها تنتج من تعويض  $t=7$  في معادته.

(22) أجد قيمة  $a$  إذا كانت النقطة  $(a, -1, 1)$  تقع على المستقيم ا.

بما أن النقطة  $(a, -1, 1)$  تقع على المستقيم ا فإنها تحقق معادته، أي أن:

$$\langle a, -1, 1 \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle \Rightarrow \begin{cases} a = -2+3t \\ -1 = 9-t \\ 1 = 1-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ t = 7 \\ t = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 8$$

(23) أجد قيمة كل من  $b$ , و  $c$  إذا كانت النقطة  $(b, c, 8)$  تقع على المستقيم ا.

بما أن النقطة  $(b, c, 8)$  تقع على المستقيم ا فإنها تحقق معادته، أي أن:

$$\langle b, c, 8 \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle \Rightarrow \begin{cases} -2+3t = b \\ 9-t = 8 \\ 1-2t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ c = 5 \end{cases}$$

(24) أجد نقطة تقع على المستقيم ا، وتقع أيضا في المستوى  $XZ$ .

بما أن النقطة المطلوبة تقع في المستوي  $XZ$  فإن الإحداثي  $y$  لها يساوي صفراً

$$\langle x, 0, z \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle \Rightarrow \begin{cases} -2+3t = x \\ 9-t = 0 \\ 1-2t = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ t = 9 \\ z = -17 \end{cases}$$

إذن، النقطة المطلوبة هي:  $(25, 0, -17)$

(25) إذا كان  $m \rightarrow = \langle 1, -2, 3 \rangle$ ,  $n \rightarrow = \langle -5, 4, a \rangle$ ، وكان المتجه:  $3n \rightarrow + bm \rightarrow$  يوازي

المتجه:  $\langle 3, -5, 3 \rangle$ ، فأجد قيمة كل من  $a$ ، و  $b$ .

$$\langle 3n \rightarrow + bm \rightarrow = \langle -15, 12, 3a \rangle + \langle b, -2b, 3b \rangle = \langle -15+b, 12-2b, 3a+3b \rangle$$

وبما أن هذا المتجه يوازي المتجه  $\langle 3, -5, 3 \rangle$  فإن:

$$\begin{aligned} \langle b, 12-2b, 3a+3b \rangle &= k \langle 3, -3, 5 \rangle \Rightarrow -15+b=3k \dots (1) \quad 12-2b=-3k \dots +15- \\ \dots (2) \quad 3a+3b &= 5k \dots \dots \dots (3) \quad (1) \times 2 + (2) \Rightarrow -18=3k \Rightarrow k=-6, b=-3, a=-7 \end{aligned}$$

(26) إذا كان  $c \rightarrow = a(3-56) + b(14) + c(0)$ ، فأجد قيمة كل من  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ ، علماً أن اتجاه  $v \rightarrow$  في اتجاه محور  $y$  الموجب، و  $|v \rightarrow| = 34$ .

اتجاه المحور  $y$  الموجب هو  $(0, 1, 0)$ ، وبما أن اتجاه  $v \rightarrow$  هو اتجاه المحور  $y$  الموجب، فإن:

$$\begin{aligned} v \rightarrow &= k(0, 1, 0) = (0, k, 0), k > 0 \quad (3a+b-5a+4b, 6a+bc) = (0, k, 0) \quad |v \rightarrow| = |k| = 34 \Rightarrow k = 34 \\ 3a+b &= 0 \dots \dots \dots (1) \quad -5a+4b = 34 \dots \dots \dots (2) \quad 6a+bc = 0 \dots \dots \dots (3) \quad -4 \\ \times (1) &+ (2) \Rightarrow -17a = 34 \Rightarrow a = -2, b = 6 \end{aligned}$$

بتعويض قيمة  $a$  وقيمة  $b$  في المعادلة (3) نجد:

$$6c = 0 \Rightarrow c = 2 + (2 -)6$$

متجهات الموقع للنقاط:  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  الواقعة على مستقيم واحد هي:

$$\vec{a} = 2\hat{i} + p\hat{j} + q\hat{k}, \vec{b} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k}, \vec{c} = 14\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

الترتيب:

(27) أجد قيمة  $p$ .

$$\vec{BC} = 18\hat{i} - 12\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow v \rightarrow = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

معادلة المستقيم  $BC \leftrightarrow$  هي:

$$(\vec{r} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}))$$

متجه موقع النقطة  $A$  يحقق هذه المعادلة لأن النقطة  $A$  تقع على المستقيم  $BC \leftrightarrow$

$$2\hat{i} + p\hat{j} + q\hat{k} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \Rightarrow$$

نساوي المعاملات المتناظرة في طرفي المعادلة:

$$4+3t \Rightarrow t=2p=13-2t \Rightarrow p=13-2(2)=9--=2 \Rightarrow$$

(28) أجد قيمة q.

استكمالاً لما سبق في السؤال 27 بمقارنة معامل  $\hat{k}$  في المعادلة

$$(\hat{i}^{\wedge}+p\hat{j}^{\wedge}+q\hat{k}^{\wedge}=-4\hat{i}^{\wedge}+13\hat{j}^{\wedge}-\hat{k}^{\wedge}+t(3\hat{i}^{\wedge}-2\hat{j}^{\wedge}+\hat{k}^{\wedge}))$$

نستنتج أن:

$$q=-1+t=-1+2=1$$

(29) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين: A, و B مع المستوى yz.

معادلة AB  $\leftrightarrow$  هي معادلة BC  $\leftrightarrow$  نفسها

$$\hat{r} \rightarrow = (-4+3t)\hat{i}^{\wedge} + (13-2t)\hat{j}^{\wedge} + (-1+t)\hat{k}^{\wedge}$$

متجه موقع أي نقطة في المستوى yz يكون على الصورة  $\hat{y}\hat{j}^{\wedge} + z\hat{k}^{\wedge}$

إذن، لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن قيم  $z, y, t$  التي تحقق المعادلة:

$$y\hat{j}^{\wedge} + z\hat{k}^{\wedge} = (-4+3t)\hat{i}^{\wedge} + (13-2t)\hat{j}^{\wedge} + (-1+t)\hat{k}^{\wedge} \Rightarrow 0 = -4+3t \Rightarrow t=4 \Rightarrow y=13-2t=13-8=5$$

إذن، النقطة المطلوبة هي: (0,5,13)

(30) أجد طول AC في صورة:  $a^2$ , حيث a عدد صحيح.

$$A(2,9,1), C(14,1,5) \Rightarrow AC^2 = 12^2 + (-8)^2 + 4^2 = 144 + 64 + 16 = 224 \Rightarrow AC = \sqrt{224} = 14\sqrt{4} = 28$$

(31) نقطتان في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، مقارناً بين المعادلتين.

$$AB \leftrightarrow: m = yz - y_1x_2 - x_1z_2 = 3 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 - 4 - 1 = -2$$

$$AB \leftrightarrow: y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$$

اتجاه  $\langle AB \leftrightarrow: \vec{v} \rightarrow = \langle 1, 1 \rangle$



المعادلة المتجهة للمستقيم  $\langle AB \rightarrow: r \rightarrow = r \rightarrow 0 + tv \rightarrow \Rightarrow r \rightarrow = \langle 1, 2 \rangle + t \langle 1, 1 \rangle$

$\rightarrow v$  تقابل الميل  $r \rightarrow 0$ ،  $m$  تقابل المقطع  $y$  في المعادلة الديكارتيّة:

يمكن الوصول للمعادلة الديكارتيّة من المعادلة المتجهة وذلك بحذف المتغير الوسيط  $t$  من المعادلة المتجهة:

$$r \rightarrow = \langle x, y \rangle = \langle 1+t, 2+t \rangle \Rightarrow x = 1+t \Rightarrow t = x-1 \Rightarrow y = 2+t \Rightarrow y = 2+x-1 \Rightarrow y = x+1$$

إذا كان المستقيم  $l_1$  يمر بالنقطة  $A(-3, -1, 12)$ ، والنقطة  $B(-2, 0, 11)$ ، وكان المستقيم  $l_2$  يوازي المستقيم  $l_1$ ، ويمر بالنقطة  $C(11, 9, 12)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(32) أجد معادلة متجهة للمستقيم  $l_1$ .

$$\langle AB \rightarrow = \langle 1, 1, -1 \rangle$$

اتجاه المستقيم  $l_1$  هو:  $\langle v \rightarrow = \langle 1, 1, -1 \rangle$

ومعادلته هي:  $\langle r \rightarrow = \langle -3, -1, 12 \rangle + t \langle 1, 1, -1 \rangle$

(33) أجد معادلمتجهة للمستقيم  $l_2$ .

بما أن  $l_2 \parallel l_1$  فلهما الاتجاه نفسه  $\langle v \rightarrow = \langle 1, 1, -1 \rangle$  أعلاه.

إذن، معادلة  $l_2$ :

$$\langle r \rightarrow = \langle 11, 9, 12 \rangle + u \langle 1, 1, -1 \rangle$$

إذا كانت:  $A(-1, -2, 1)$ ،  $B(-3, 4, -5)$ ،  $C(0, -2, 4)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(34) أجد إحداثيات النقطة  $M$  التي هي نقطة منتصف  $\overline{AB}$ .

$$(M = (-1-3)/2, (-2+4)/2, (1-5)/2) = (-2, 1, -2)$$

(35) إذا وقعت النقطة  $N$  على القطعة المستقيمة  $\overline{BC}$ ، وكان:  $|BN \rightarrow| = 2|NC \rightarrow|$ ، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين  $M$  و  $N$ .

$$\begin{aligned} NC \rightarrow &= 2|BN \rightarrow| \Rightarrow NC = 2BN \\ BC \rightarrow &= BN \rightarrow + NC \rightarrow = BN \rightarrow + 2BN \rightarrow = 3BN \rightarrow \Rightarrow BN \rightarrow \\ &= \frac{1}{3}BC \rightarrow \\ MN \rightarrow &= MB \rightarrow + BN \rightarrow = MB \rightarrow + \frac{1}{3}BC \rightarrow \\ MB \rightarrow &= \langle -3 - (-2), 4 - 1, -5 - (-2) \rangle = \langle -1, 3, -3 \rangle \\ BC \rightarrow &= \langle 0 - (-3), -2 - 4, 4 - (-5) \rangle = \langle 3, -6, 9 \rangle \Rightarrow MN \rightarrow = \langle \\ &= -1, 3, -3 \rangle + \frac{1}{3} \langle 3, -6, 9 \rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle = v \end{aligned}$$

معادلة المستقيم MN  $\leftrightarrow$  المتجهة

$$\langle r \rightarrow = r \rightarrow 0 + tv \rightarrow \Rightarrow r \rightarrow = \langle -2, 1, -2 \rangle + t \langle 0, 1, 0 \rangle \text{ هي:}$$

(36) يمر المستقيم  $l_1$  بالنقطتين:  $P(-5, 2, 4), Q(-2, 3, -3)$ ، ويمر المستقيم  $l_2$  بالنقطتين:  $R(0, -8, -1), S(12, -23, a)$ . إذا كان المستقيم  $l_1$  والمستقيم  $l_2$  متقاطعين، فما قيمة  $a$ ؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعها؟

$$PQ \leftrightarrow: PQ \rightarrow = \langle 3, -5, -1 \rangle = v \rightarrow 1 \text{ اتجاه}$$

$$\langle PQ \leftrightarrow: r \rightarrow = \langle -2, -3, 3 \rangle + t \langle 3, -5, -1 \rangle \text{ معادلة}$$

$$\rightarrow RS \leftrightarrow: RS \rightarrow = \langle 12, -15, a+1 \rangle = v \text{ اتجاه}$$

$$\langle RS \leftrightarrow: r \rightarrow = \langle 0, -8, -1 \rangle + u \langle 12, -15, a+1 \rangle \text{ معادلة}$$

نساوي  $r \rightarrow$  في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة:

$$\begin{aligned} t \langle 3, -5, -1 \rangle &= \langle 0, -8, -1 \rangle + u \langle 12, -15, a+1 \rangle \Rightarrow -2 + 3t = 12u \dots \dots + \langle 3, 3, -2 \rangle \\ \dots \dots \dots (1) -3 - 5t &= -8 - 15u \Rightarrow 1 - t = -3u \dots \dots \dots (2) \\ 3 - t &= -1 + u(a+1) \Rightarrow 4 - t = u(a+1) \dots \dots (3) \end{aligned}$$

$$\text{بحل (1) و(2) نجد أن: } u=13, t=2$$

وبتعويض القيمتين  $u=13, t=2$  في المعادلة (3) كونهما يحققانها لأن المستقيمين متقاطعين نجد أن:

$$a+1 \Rightarrow 6 = a+1 \Rightarrow a=5 \quad 13=4-2$$

نجد نقطة التقاطع بتعويض  $t=2$  في معادلة PQ  $\leftrightarrow$ :

$$\langle r \rightarrow = \langle -2, -3, 3 \rangle + 2 \langle 3, -5, -1 \rangle = \langle 4, -13, 1 \rangle$$

إذن، نقطة التقاطع هي:  $(4, -13, 1)$



(37) أقمار صناعية: مر القمر الصناعي  $S_1$  بموقعين، هما:  $(B(100,65,220), A(30,-75,90)$ ، ومر القمر الصناعي  $S_2$  بموقعين، هما:  $(D(120,85,160), C(-20,45,200)$ . أحدد العلاقة بين المستقيم  $AB \leftrightarrow$  والمستقيم  $CD \leftrightarrow$  من معادلتيهما.

$$\langle AB \rightarrow = \langle 70, 140, 130$$

يمكن تبسيط اتجاه  $v \rightarrow 1 = \langle 7, 14, 13$  :  $AB \rightarrow$

تكون معادلته:  $r \rightarrow = \langle 30, -75, 90 \rangle + t \langle 7, 14, 13$

$$\langle CD \rightarrow = \langle 140, 40, -40$$

يمكن تبسيط اتجاه  $CD \rightarrow$  وتكون معادلته:  $v \rightarrow 2 = \langle 7, 2, -2$

المستقيمان ليسا متوازيين لأن اتجاهيهما ليسا متوازيين ( $v \rightarrow 1 \neq kv \rightarrow 2$ )

نبحث عن تقاطع المستقيمين بمحاولة إيجاد  $t, u$  بحيث:

$$30 + 7t, -75 + 14t, 90 + 13t = (-20 + 7u, 45 + 2u, 200 - 2u) \quad 30 + 7t = -20 + 7u$$

$$u = u = 507 + t \dots (1) \quad -75 + 14t = 45 + 2u \Rightarrow u = -60 + 7t \dots (2) \quad 90 + 13t = 200$$

$$(-2u \Rightarrow 13t + 2u = 110 \dots (3)$$

بحل المعادلتين (1) و(2) نجد أن:  $t = 23521, u = 38521$

لكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (3) إذن المستقيمان غير متقاطعين لعدم تحقق المعادلات الثلاث معاً، وهما غير متوازيين كما وضحنا سابقاً فهما إذن متخلفان.

(38) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حلها في موضعها تحت عنوان "مسألة اليوم"