

أتحقق من فهمي

الضرب القياسي

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (144):

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$(a) \quad \vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 4(-3) + 8(7) - 3(2) = -12 + 56 - 6 = 38$$

$$(b) \quad \vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}, \vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = -3(-12) + 5(6) - 1(-8) = 36 + 30 + 8 = 74$$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه \vec{u} والمتجه \vec{w} في كل مما يأتي، مقرباً الناتج إلى أقرب عشر درجة:

$$(a) \quad \vec{u} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{w} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = -3(4) + 5(2) - 4(-3) = -12 + 10 + 12 = 10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = 50 \quad |\vec{w}| = \sqrt{16 + 4 + 9} = 29$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{10}{50 \times 29} \approx 0.069$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.069) \approx 86.1^\circ$$

$$(b) \quad \vec{u} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 15, -9 \rangle$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2(-3) - 10(15) + 6(-9) = -6 - 150 - 54 = -210$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 100 + 36} = 140 \quad |\vec{w}| = \sqrt{9 + 225 + 81} = 315$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| |\vec{w}|} = \frac{-210}{140 \times 315} = -\frac{1}{140}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{140}\right) \approx 90.4^\circ$$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (147):

إذا كانت: $r \rightarrow = (3-21)+t(2-5-1)$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $r \rightarrow = (530)+u(10-3)$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب درجة.

اتجاه المستقيم l_1 هو $v \rightarrow = (2, -5, -1)$ واتجاه المستقيم l_2 هو $u \rightarrow = (1, 0, -3)$

$$v \rightarrow \cdot u \rightarrow = 1(2) + 0(-5) - 3(-1) = 2 + 3 = 5$$

$$|v \rightarrow| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$$

$$|u \rightarrow| = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot u \rightarrow}{|v \rightarrow| |u \rightarrow|} = \frac{5}{\sqrt{30} \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{300}} = \frac{5}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \approx 73^\circ$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2 هو 73° تقريباً.

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (149):

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$$

$$GF \rightarrow = (-1, 4, 6) \quad |GF \rightarrow| = \sqrt{1 + 16 + 36} = \sqrt{53}$$

$$GE \rightarrow = (-4, 4, -2) \quad |GE \rightarrow| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$GF \rightarrow \cdot GE \rightarrow = -1(-4) + 4(4) + 6(-2) = 4 + 16 - 12 = 8$$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ ، إذن:

$$\cos \theta = \frac{GF \rightarrow \cdot GE \rightarrow}{|GF \rightarrow| |GE \rightarrow|} = \frac{8}{\sqrt{53} \times 6} = \frac{4}{3\sqrt{53}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{3\sqrt{53}} \right) \approx 79.4^\circ$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{53}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{468}} = \sqrt{\frac{452}{468}} = \sqrt{\frac{113}{117}} \approx 0.97$$

$$A = \frac{1}{2} |GF \rightarrow| |GE \rightarrow| \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{53} \times 6 \times 0.97 \approx 15.5$$

ويمكن إيجاد $\theta \sin$ من معرفتنا بقيمة $\theta \cos$ من دون إيجاد زاوية θ كما يأتي:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{3\sqrt{53}} \right) \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{53}} \right)^2} = \sqrt{\frac{452}{468}} = \sqrt{\frac{113}{117}} \approx 0.97$$

$$A = \frac{1}{2} |GF \rightarrow| |GE \rightarrow| \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{53} \times 6 \times 0.97 \approx 15.5$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

أتحقق من فهمي صفحة (151):

إذا كانت: $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم
، والنقطة $P(2, 0, 103)$ غير واقعة على المستقيم ، فأجب عن السؤالين الآتيين:
(a) أوجد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم .

اتجاه المستقيم $\vec{v} = (5, 7, -3)$ المعطى هو:

افرض أن مسقط النقطة P على النقطة F ، فيكون متجه موقعها هو:

$$\vec{OF} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} - (3 + 3t)\hat{k}$$

ويكون العمود من P على F هو \vec{PF} حيث:

$$\vec{PF} = \vec{OF} - \vec{OP} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} - (3 + 3t)\hat{k} - (2\hat{i} + 103\hat{k}) = \\ \vec{PF} = (14 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} - (193 + 3t)\hat{k}$$

ولأن المتجهين \vec{PF}, \vec{v} متعامدان فإن $\vec{PF} \cdot \vec{v} = 0$

$$14 + 5t + 7(11 + 7t) - 3(-193 - 3t) = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{OF} = (16 + 5(-2))\hat{i} + 5\hat{j} - \\ (11 + 7(-2))\hat{j} - (3 + 3(-2))\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

إذن مسقط العمود من النقطة P على المستقيم F هو النقطة $F(6, -3, 3)$

(b) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم .

$$PF = (6 - 2)^2 + (-3 - 0)^2 + (3 - 103)^2 = 2263$$

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

أتحقق من فهمي صفحة (154):

(a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال السابق.

$$\vec{DE} = (7, 8, 2) \quad |\vec{DE}| = \sqrt{49 + 64 + 4} = 11 \quad \vec{DB} = (8, 4, -8) \quad |\vec{DB}| = \sqrt{64 + 16 + 64} = 12 \\ \vec{DE} \cdot \vec{DB} = 7(8) + 8(4) + 2(-8) = 68 - 16 = 52 \\ \cos^{-1}\left(\frac{52}{11 \cdot 12}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{13}{33}\right) \approx 66.3^\circ$$

(b) أجد حجم الهرم.

$$AB = 8^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 72$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM،
حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري القاعدة
المربعة: $(M=(1+92,1-72,-1+32))=(5,-3,1)$

$$EM=(-3)^2+(-6)^2+(-6)^2=9$$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

$$V=13(72)^2(9)=72(3)=216$$

إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مربعة.