

أدرب وأحل المسائل

الضرب القياسي

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

$$(u \rightarrow = 5i^{\wedge} - 4j^{\wedge} + 3k^{\wedge}, v \rightarrow = 7i^{\wedge} + 6j^{\wedge} - 2k^{\wedge}) \quad (1)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 5(7) - 4(6) + 3(-2) = 5$$

$$(u \rightarrow = 4i^{\wedge} - 8j^{\wedge} - 3k^{\wedge}, v \rightarrow = 12i^{\wedge} + 9j^{\wedge} - 8k^{\wedge}) \quad (2)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 4(12) - 8(9) - 3(-8) = 0$$

$$(u \rightarrow = \langle -5, 9, 17 \rangle, v \rightarrow = \langle 4, 6, -2 \rangle) \quad (3)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = -5(4) + 9(6) + 17(-2) = 0$$

$$(u \rightarrow = \langle 1, -4, 12 \rangle, v \rightarrow = \langle 3, 10, -5 \rangle) \quad (4)$$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 1(3) - 4(10) + 12(-5) = -97$$

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عشر درجة في كل مما يأتي:

$$(m \rightarrow = 4i^{\wedge} - 2j^{\wedge} + 5k^{\wedge}, n \rightarrow = 3i^{\wedge} + 4j^{\wedge} - 2k^{\wedge}) \quad (5)$$

$$m \rightarrow \cdot n \rightarrow = 4(3) - 2(4) + 5(-2) = -6$$

$$|m \rightarrow| = \sqrt{16 + 4 + 25} = 45 \quad |n \rightarrow| = \sqrt{9 + 16 + 4} = 29$$

$$\cos \theta = \frac{m \rightarrow \cdot n \rightarrow}{|m \rightarrow| |n \rightarrow|} = \frac{-6}{45 \times 29} = \cos^{-1} \left(\frac{-6}{1275} \right) \approx 99.6^\circ$$

$$(v \rightarrow = \langle 3, -2, 9 \rangle, w \rightarrow = \langle 5, 3, -4 \rangle) \quad (6)$$

$$v \rightarrow \cdot w \rightarrow = 3(5) - 2(3) + 9(-4) = -27$$

$$|v \rightarrow| = \sqrt{9 + 4 + 81} = 94 \quad |w \rightarrow| = \sqrt{25 + 9 + 16} = 50$$

$$\cos \theta = \frac{v \rightarrow \cdot w \rightarrow}{|v \rightarrow| |w \rightarrow|} = \frac{-27}{94 \times 50} \approx -0.1132 \quad \theta = \cos^{-1}(-0.1132) \approx 127^\circ$$

(7) إذا كانت $A(3, 5, -4)$, $B(7, 4, -3)$ و O نقطة الأصل، فأجد $\angle OAB$ إلى أقرب درجة.

$$AO \rightarrow = \langle -3, -5, 4 \rangle \quad |AO \rightarrow| = \sqrt{9 + 25 + 16} = 50$$

$$AB \rightarrow = \langle 4, -1, 1 \rangle \quad |AB \rightarrow| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

$$(\vec{AO} \cdot \vec{AB} \rightarrow |\vec{AO} \rightarrow| |\vec{AB}| = 18 \vec{AO} \cdot \vec{AB} \rightarrow = -3(4) - 5(-1) + 4(1) = -30 = \cos \theta - 1$$

$$\circ (-0.1) \approx 96(-350 \times 18) = \cos \theta - 1 \rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.1)$$

(8) يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $(1, 4, 2)$, $(-3, 5, 7)$ ، ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: $(5, 3, -6)$, $(1, 2, -1)$ أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 إلى أقرب عشر درجة.

$$\langle \vec{v} \rightarrow = \langle -3 - 2, 5 + 1, 7 - 4 \rangle = \langle -5, 6, 3 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم } l_1$$

$$\langle \vec{w} \rightarrow = \langle 1 - 6, 2 + 5, -1 - 3 \rangle = \langle -5, 7, -4 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم } l_2$$

$$|\vec{v} \rightarrow| = 25 + 36 + 9 = 70 \quad |\vec{w} \rightarrow| = 25 + 49 + 16 = 90$$

$$\vec{v} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow = -5(-5) + 6(7) + 3(-4) = 25 + 42 - 12 = 55$$

$$\circ (55/6300) \approx 46.1 \quad (\vec{u} \rightarrow \cdot \vec{w} \rightarrow / |\vec{u} \rightarrow| |\vec{w} \rightarrow|) = \cos \theta = 55/70 = 0.7857$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 و l_2 هو 46.1° تقريباً.

(9) إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + \lambda \langle -6, q+5, 3 \rangle$ والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r} \rightarrow = \langle 1, 4, -5 \rangle + \mu \langle 5, q-6, -4 \rangle$ متعامدين، فما القيم الممكنة للثابت q ؟

$$\langle \vec{v} \rightarrow = \langle -6, q+5, 3 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم الأول}$$

$$\langle \vec{u} \rightarrow = \langle 5, q-6, -4 \rangle \text{ هو: اتجاه المستقيم الثاني}$$

المستقيمان متعامدان، فاتجاههما متعامدان، أي أن: $\vec{v} \rightarrow \cdot \vec{u} \rightarrow = 0$

$$q+5)(q-6)+3(-4)=0 \Rightarrow q^2-q-72=0 \Rightarrow (q-9)(q+8)=0 \Rightarrow q=9, \text{ or } q=-8$$

إذا كانت: $\vec{r} \rightarrow = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم l ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(10) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

لتكن A هي المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم l ، فإن متجه موقعها هو:

$$\langle \vec{OA} \rightarrow = \langle -t, 2+2t, -3+5t \rangle$$

إذا كان $\vec{AP} \rightarrow$ هو العمود من P على المستقيم l ، فإن: $\vec{AP} \rightarrow = \vec{OP} \rightarrow - \vec{OA} \rightarrow$

$$\langle AP \rightarrow = \langle -2+t, 22-(2+2t), 5-(-3+5t) \rangle = \langle -2+t, 20-2t, 8-5t \rangle$$

بما أن $AP \rightarrow$ يعامد a ، إذن: $AP \rightarrow \cdot \langle -1, 2, 5 \rangle = 0$

$$t) + 2(20-2t) + 5(8-5t) = 0 \Rightarrow t = 4115 \Rightarrow OA \rightarrow = \langle -4115, 11215, 3+2-1 \rangle \Rightarrow \langle 23$$

إذن، مسقط العمود P على المستقيم a هو $A(-4115, 11215, 323)$

(11) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم a .

$$AP = (-2+4115)^2 + (22-11215)^2 + (5-323)^2 = 5487015 \approx 15.6$$

(12) أجد مساحة المثلث ABC ، حيث: $AB \rightarrow = \langle 4, 9, 1 \rangle$, $AC \rightarrow = \langle 9, 1, 4 \rangle$.

$$|AB \rightarrow| = 16+81+1=98 \quad |AC \rightarrow| = 81+1+16=98 \quad AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = 9(4)+1(9)+4(1)=49$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$(12) = 60^\circ = \cos^{-1} \left(\frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \frac{49}{98} = 60^\circ$$

(13) أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3, 1)$, $B(2, 7, -3)$, $C(4, -5, 2)$.

$$AB \rightarrow = \langle 1, 4, -4 \rangle \Rightarrow |AB \rightarrow| = 1+16+16=33 \quad AC \rightarrow = \langle 3, -8, 1 \rangle \Rightarrow |AC \rightarrow| = 9+64+1=74$$

$$AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = 1(3)+4(-8)-4(1) = -33$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$(-33/74) = \cos^{-1} \left(\frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \frac{-33}{74}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-33}{74} \right) \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{-33}{74} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1089}{5476}} = \sqrt{\frac{4387}{5476}} \approx 0.896$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |AB \rightarrow| |AC \rightarrow| \sin \theta = \frac{1}{2} \times 33 \times 74 \times 0.896 \approx 1053.2 \approx 18.4$$



(14) حزام ناقل: يمثل المتجه:
 $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يولدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$. أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F ، علماً بأن القوة بالنيوتن N ، والمسافة بالمتري m ، ومقدار الشغل (W) المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة؛ أي: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

$$\vec{d} = \langle 8, 3, 6 \rangle, \vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37J$$

(15) إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$ ، والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم a ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم a ، حيث $\vec{OQ} \perp$ عمودي على a ، فأجد متجه الموقع للنقطة Q .

$$\{\vec{d} = \langle 8, 3, 6 \rangle, \vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle \quad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37$$

إذن، يمكن تبسيط اتجاه المستقيم a بقسمة \vec{RS} على 4:

$$\vec{v} = \langle -4, 2, 3 \rangle$$

$$\text{معادلة المستقيم } a \text{ هي: } \vec{r} = \langle 11, -9, 11 \rangle + t \langle -4, 2, 3 \rangle$$

النقطة Q هي المسقط العمودي للنقطة O على هذا المستقيم، فيكون متجه موقعها \vec{OQ} هو:

$$\vec{OQ} = \langle 11 - 4t, -9 + 2t, 11 + 3t \rangle$$

بما أن $\vec{OQ} \perp \vec{v}$ متعامدان، فإن: $\vec{OQ} \cdot \vec{v} = 0$

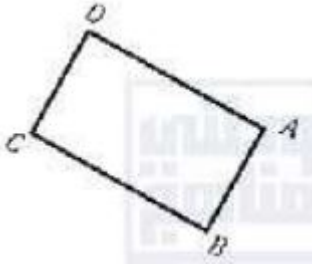
$$(11 - 4t) + 2(-9 + 2t) + 3(11 + 3t) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{OQ} = \langle 7, -7, 14 \rangle$$

إذا كانت متجهات مواقع النقاط: A ، B ، و C هي:
 $(2, 9, 7)$ ، $(14, 17, 4)$ ، $(-2, 2, 4)$ على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(16) أثبت أن: $\vec{AB} \perp \vec{AD}$.

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \langle -4, 13, 22 \rangle, \vec{OB} = \langle 4, 17, 14 \rangle, \vec{OD} = \langle 2, -29, 7 \rangle \\ \vec{AD} &= \langle 2+4, -29-13, 7-22 \rangle = \langle 6, -42, -15 \rangle \\ \vec{AB} &= \langle 4+4, 17-13, 14-22 \rangle = \langle 8, 4, -8 \rangle \\ \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= 6(8) - 42(4) - 15(-8) = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD} \end{aligned}$$

(17) أجد متجه موقع النقطة C إذا كان ABCD مستطيلاً.



ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة)، أينما كان موقع O، فإن:

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \langle 4, 17, 14 \rangle + \langle 6, -42, -15 \rangle = \langle 10, -25, -1 \rangle$$

(ويمكن إيجاد \vec{OC} عبر الرأس D من

$$\text{العلاقة: } \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{DC} = \vec{OD} + \vec{AB})$$

(18) أجد مساحة المستطيل ABCD.

$$\begin{aligned} |\vec{AD}| &= \sqrt{36 + 1764 + 225} = 2025 = 45 \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{64 + 16 + 64} = 144 = 12 \\ \text{Area} &= (45)(12) = 540 \end{aligned}$$

إذن، مساحة ABCD تساوي 540 وحدة مربعة.

(19) أجد متجه موقع مركز المستطيل ABCD.

مركز المستطيل هي نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر \vec{BD} ولتكن نقطة منتصفه E، فإن:

$$\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\langle 4, 17, 14 \rangle + \langle 2, -29, 7 \rangle) = \langle 3, -6, 21 \rangle$$

تمثل: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1 \rangle + t\langle 3, 1, 4 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وتمثل:

$\vec{r} = \langle 2, 8, -1 \rangle + u\langle 2, 0, -3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وتمثل:

$\vec{r} = \langle 3, 19, 10 \rangle + v\langle -1, 3, 1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3 .

إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على

المستقيم l_3 ، حيث: $\vec{TF} \perp l_3$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(20) أجد إحداثيات النقطة F.

لإيجاد نقطة تقاطع l_1 نسائي l_2 في معادلتها ونسائي الإحداثيات المتناظرة:

$$5+3t, 7+t, 1+4t = \langle 2+2u, 8, -1-3u \rangle - 5+3t = 2+2u \Rightarrow 3t-2u=7 \dots\dots\dots (-)$$

$$(1) 7+t=8 \Rightarrow t=1 \Rightarrow 4t = -1-3u \Rightarrow 4t+3u = -2 \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض $t=1$ في المعادلتين (1) و (2) نجد أن $u=-2$

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=1$ في معادلة l_1

$$\langle r \rightarrow = \langle -5+3(1), 7+1, 1+4(1) \rangle = \langle -2, 8, 5 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع l_1, l_2 هي $T(-2, 8, 5)$

F هو المسقط العمودي للنقطة T على l_3 ، إذن:

$$OF \rightarrow = \langle 3-v, 19+3v, 10+v \rangle \quad TF \rightarrow = \langle 3-v-(-2), 19+3v-8, 10+v-5 \rangle = \langle 5-v, 11+3v, v+5 \rangle$$

اتجاه l_3 هو $\langle w \rightarrow = \langle -1, 3, 1 \rangle$

لكن $TF \rightarrow \cdot w \rightarrow = 0$ ، إذن، يعامد l_3 إذن،

$$v) + 3(11+3v) + 1(v+5) = 0 \Rightarrow v = -3 \Rightarrow OF \rightarrow = \langle 3-(-3), 19+3(-3), -5 \rangle = \langle 6, 10, 7 \rangle$$

(21) أجد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3 .

$$TF \rightarrow = \langle -8, 2, -2 \rangle \Rightarrow |TF \rightarrow| = \sqrt{64+4+4} = 62$$

إذا كانت: $\langle r \rightarrow = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3 ، وكانت $A(3, -2, 1), B(5, 3, 0)$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(22) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم AB والمستقيم l_3 .

$$\langle AB \rightarrow = \langle 2, 5, -1 \rangle$$

وهذا هو اتجاه المستقيم $AB \rightarrow$

اتجاه المستقيم l هو: $\langle v \rightarrow = \langle -1, 3, 1 \rangle$

$$|AB \rightarrow| = 4 + 25 + 1 = 30 \quad |v \rightarrow| = 1 + 9 + 1 = 11 \quad AB \rightarrow \cdot v \rightarrow = 2(-1) + 5(3) - 1(1) = 12$$

$$\cos \theta = \frac{AB \rightarrow \cdot v \rightarrow}{|AB \rightarrow| |v \rightarrow|} = \frac{12}{30 \times 11} \approx 0.3636 \Rightarrow \theta \approx \cos^{-1}(0.3636) \approx 68.7^\circ$$

(23) تقع النقطة C على المستقيم AB ، حيث: $AB=AC$. أجد إحداثيات النقطة C .

بما أن A, B, C على استقامة واحدة، و $AB=AC$ إذن، $A(3, -2, 1)$ هي نقطة منتصف BC حيث:

$$C(x, y, z), B(5, 3, 0) \Rightarrow (x+5, y+3, z+0) = (2 \times 3, 2 \times (-2), 2 \times 1) = (6, -4, 2)$$

$$\Rightarrow x+5=6 \Rightarrow x=1 \quad y+3=-4 \Rightarrow y=-7 \quad z=2$$

إذن، إحداثيات النقطة C هي: $(1, -7, 2)$

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ والنقطة $B(8, 5, 3)$ على المستقيم l ، وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته: $\langle r \rightarrow = \langle 6, 11, 7 \rangle + t \langle -1, 3, 2 \rangle$:

(24) أبين أن النقطة B تقع على المستقيم l_2 .

متجه موقع أي نقطة على l_2 يكون $\langle r \rightarrow = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t \rangle$

حتى تقع B على l_2 ينبغي وجود قيمة t تحقق المعادلة: $\langle t, 11+3t, 7+2t \rangle = \langle 8, 5, 3-6 \rangle$

$$t=8 \Rightarrow 11+3t=5 \Rightarrow 11+24=5 \Rightarrow 35=5 \Rightarrow \text{لا يوجد حل}$$

لهذه المعادلات الثلاث الحل نفسه $t=-2$

إذن، تقع B على المستقيم l_2 لأنها تنتج من تعويض $t=-2$ في معادلته.

(25) أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان.

اتجاه l_1 هو: $\langle AB \rightarrow = \langle 15, 9, -6 \rangle$

ويمكن تبسيطه إلى $\langle u \rightarrow = \langle 5, 3, -2 \rangle$

اتجاه l_2 هو: $\langle v \rightarrow = \langle -1, 3, 2 \rangle$

$$u \rightarrow \cdot v \rightarrow = 5(-1) + 3(3) - 2(2) = 0$$

إذن، المستقيمان 1, 2 متعامدان.

$$(26) \text{ أجد } m\angle ABC.$$

بما أن 1, 2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (كونها واقعة على كل منهما كما سبق)

$$\text{إذن، } m\angle ABC = 90^\circ$$

$$(27) \text{ أجد مساحة المثلث } ABC.$$

المثلث ABC قائم في B

$$AB = \sqrt{15^2 + 9^2 + (-6)^2} = 34 \quad BC = \sqrt{22^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = 56 = 214 \quad \text{Area} = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2} \times 34 \times 214 = 4788 \approx 69.2$$

إذن، مساحة المثلث ABC تسوي 69.2 وحدة مربعة تقريباً.

ABCD هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي:

$$A(4, 3, -1), B(-4, 5, 2), C(6, -1, 0), D(10, 11, 19) \text{ تباعاً:}$$

$$(28) \text{ أجد مساحة المثلث } ABC \text{ في صورة: } a6.$$

$$AB \rightarrow = \langle -8, 2, 3 \rangle \Rightarrow |AB \rightarrow| = \sqrt{64 + 4 + 9} = 77 \quad AC \rightarrow = \langle 2, -4, 1 \rangle \Rightarrow |AC \rightarrow| = \sqrt{4 + 16 + 1} = 21$$

$$AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow = -8(2) + 2(-4) + 3(1) = -21$$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$$(-311) = \cos^{-1} \left(\frac{AB \rightarrow \cdot AC \rightarrow}{|AB \rightarrow| |AC \rightarrow|} \right) = \cos^{-1} \theta = \cos^{-1} \theta$$

$$\theta = 120^\circ = 1 - 311 = 811 = 2211 \quad \text{Area} = \frac{1}{2} |AB \rightarrow| \times |AC \rightarrow| \sin \theta = -311 \Rightarrow \sin \theta = \frac{-311}{77 \times 21 \times 2211} = 76$$

$$(29) \text{ أثبت أن: } m\angle AED = 90^\circ, \text{ حيث } E(1, 2, 1).$$

$$EA \rightarrow = \langle 3, 1, -2 \rangle, ED \rightarrow = \langle 9, 9, 18 \rangle \quad EA \rightarrow \cdot ED \rightarrow = 3(9) + 1(9) - 2(18) = 0$$

إذن، $EA \rightarrow \perp ED \rightarrow$ وقياس الزاوية AED هو 90° .

(30) إذا علمت أن النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم ABCD.

$$DE \rightarrow = 81 + 81 + 324 = 96$$

ويمثل ارتفاع h، أما مساحة قاعدته $A=76$ ، وذلك من السؤال 28، إذن حجم الهرم هو:

$$V = 13Ah = 13 \times 76 \times 96 = 126$$

إذن حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.

إذا كانت $A(3, 1, -6), B(5, -2, 0), C(8, -4, -6)$ ، فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تبعاً:

(31) أبين أن $AC \rightarrow = n(1 - 10)$ ، حيث n عدد صحيح.

$$AC \rightarrow = (5 - 50) = 5(1 - 10)$$

تكون قيمة n هي 5

(32) أبين أن قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1} \frac{5}{214}$.

$$CA \rightarrow = (-5, 5, 0) \Rightarrow |CA \rightarrow| = 25 + 25 + 0 = 5 \quad CB \rightarrow = (-3, 2, 6) \Rightarrow |CB \rightarrow| = 9 + 4 + 36 = 49$$

$$CA \rightarrow \cdot CB \rightarrow = -5(-3) + 5(2) + 0(6) = 25$$

ليكن θ قياس الزاوية ACB

$$\cos \theta = \frac{CA \rightarrow \cdot CB \rightarrow}{|CA \rightarrow| |CB \rightarrow|} = \frac{25}{5 \cdot 7} = \frac{1}{7} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{7} \right)$$

(33) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AC.

$$AC \rightarrow = (5, -5, 0)$$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم AC بالمتجه $v \rightarrow = (1, -1, 0)$

وتكون معادلته: $r \rightarrow = (8, -4, -6) + t(1, -1, 0)$

(34) إذا كانت $D(6, -1, p)$ ، وعلِّم أن $AC \leftrightarrow BD$ ، متقاطعان، فما قيمة p ؟

$$\langle BD \rightarrow = \langle 1, 1, p$$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $BD \rightarrow$ بالمتجه $\langle 1, 1, p \rightarrow$

$$\langle BD \rightarrow: r \rightarrow = \langle 5, -2, 0 \rangle + u \langle 1, 1, p$$

يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u, t بحيث تتساوى لهما $r \rightarrow$ في المعادلتين:

$$t, -4 - t, -6) = \langle 5 + u, -2 + u, up \rangle 8 + t = 5 + u \Rightarrow t - u = -3 \dots \dots \dots (1) -4 - t = +8$$

$$(-2 + u \Rightarrow t + u = -2 \dots \dots \dots 2up = -6 \dots \dots \dots (3)$$

بجمع المعادلتين (1) و(2)، نجد أن: $t = -5, u = 12$ ثم بالتعويض في (3) نجد أن:
 $p = -12$

$$D(6, -1, -12$$

(35) أبين أن الشكل ABCD معين، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

$$AB \rightarrow = \langle 2, -3, 6 \rangle DC \rightarrow = \langle 2, -3, 6 \rangle \Rightarrow AB \rightarrow = DC \rightarrow BC \rightarrow = \langle 3, -2, -6 \rangle AD \rightarrow = \langle 3, -2, -6 \rangle \Rightarrow BC \rightarrow = AD$$

من (1) و(2) ينتج أن الشكل ABCD متوازي أضلاع، والآن نجد طول AB, AD

$$AB = |AB \rightarrow| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \quad AD = |AD \rightarrow| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

وبما أن ABCD متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.

(36) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حل هذا السؤال في موضعه تحت عنوان "مسألة اليوم".