اختبار نهاية الوحدة

المتجهات

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) إذا كانت $A(-3,4,9), B(5,-2,3)$، فإن الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle -12,2,2\rangle$

b) $\langle 8,-6,-6\rangle$

c) $\langle -6,1,1\rangle$

d) $\langle -6,8,-6\rangle$

(2) إذا كان: $\vec{v}=\langle 2,c,-5\rangle$، وكان: $|\vec{v}|=35$، فإن c تساوي:

a) 4

b) -3,5

c) 15

d) -4,4

(3) إذا كان PQR مستقيماً، حيث: $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$, $PQ:QR=3:1$، فإن التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو:

a) $13\vec{a}$

b) $14\vec{a}$

c) $-13\vec{a}$

d) $-14\vec{a}$

(4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{r}=\langle 4,-2,5\rangle+t\langle -2,1,3\rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) (18,10,28)

b) (28,10,35)

c) (8,10,20−)

d) (20,10,41−)

(5) إذا كان: $\vec{v}=\langle 2,-2,5\rangle$، وكان: $\vec{w}=\langle -3,4,6\rangle$، فإن $3\vec{v}-2\vec{w}$ يساوي:

a) ⟨0,2,3⟩

b) ⟨14,3−,12⟩

c) ⟨8−,16−,13⟩

d) ⟨13,16,8−⟩

(6) إذا كان قياس الزاوية بيـن $\vec{a},\vec{b}$ هو 60°، وكان: $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$،
وكان: $|\vec{a}|=10$، فإن مقدار $\vec{b}$ هو:

a) 3

b) 5

c) 6

d) 24

(7) إذا كان: $\vec{u}=\langle -4,2,a\rangle$، وكان: $\vec{v}=\langle 2,b,5\rangle$، وكان: $\vec{u}\parallel\vec{v}$ فإن قيمة a هي:

a) -10

b) -5

c) -1

d) 5

(8) إذا كان المتجه $\vec{u}=(5-63)$، والمتجه: $\vec{v}=(614q)$ متعامدين، فإن قيمة q

هي:

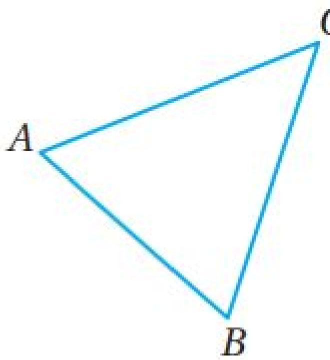
a) 0

b) 8

c) 10

d) 18

(9) فـي المثلـث المجـاور، إذا كـان: AB→=3i^−j^+2k^، وكان: BC→=−2i^+4j^+3k^، فأجـد قيـاس الزاوية ABC إلى أقرب عشر درجة.



BA→=⟨−3,1,−2⟩⇒|BA→|=9+1+4=14BC→=⟨−2,4,3⟩⇒|BC→|=4+16+9
(BA→⋅BC→|BA→||BC→|=29BA→⋅BC→=−3(−2)+1(4)−2(3)=4θ=cos−1
∘(414×29)≈78.5)=cos−1

(10) إذا وقعت النقاط: E(2,0,4),F(h,5,1),G(3,10,k)على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h وk؟

E,F,G تقع على استقامة واحدة، إذن EF→∥FG→، ومنه:

⟨h−2,5,−3⟩∥⟨3−h,5,k−1⟩

إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث:

⟨h−2,5,−3⟩=c⟨3−h,5,k−1⟩⇒5c=5⇒c=1h−2=(3−h)c⇒h−2=3−h⇒h=52(k−1)c=−3⇒k−1=−3⇒k=−2

(11) إذا كانت A(3,−2,4),B(1,−5,6),C(−4,5,−1)، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

$AB\rightarrow=\langle -2,-3,2\rangle r\rightarrow=\langle 3,-2,4\rangle+t\langle -2,-3,2\rangle\Rightarrow OD\rightarrow=\langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$
$CD\rightarrow=\langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle-\langle -4,5,-1\rangle=\langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle CD\rightarrow\perp AB$
$\rightarrow\Rightarrow CD\rightarrow\cdot AB\rightarrow=0\Rightarrow-2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t)=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow OD\rightarrow=\langle 3$
$(+2,-2+3,4-2\rangle=\langle 5,1,2\rangle\Rightarrow D(5,1,2$

إذا كانت: $(r\rightarrow=(-2-59)+\lambda(-507)$ معادلة متجهة للمستقيم l1، وكانت:
$(r\rightarrow=(-3-175)+\mu(24-1)$ معادلة متجهة للمستقيم l2، فأجيب عن السؤالين الأتيين تباعاً:

(12) أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l1,l2.

لإيجاد نقطة التقاطع نساوي $r\rightarrow$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين λ,μ:

$\langle -2-5\lambda,-5,9+7\lambda\rangle=\langle -3+2\mu,-17+4\mu,5-\mu\rangle-17+4\mu=-5\Rightarrow\mu=3-2-5\lambda=-3+2\mu\Rightarrow\lambda=-1$

وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية:

$9+7\lambda=5-\mu 9+7(-1)=5-32=2$

نجد نقطة تقاطعهما بتعويض $\lambda=-1$ في معادلة l1، وهي النقطة $(3,-2,5)$

(13) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين:l1,l2.

اتجاه المستقيم $l1: v\rightarrow=\langle -5,0,7\rangle$

اتجاه المستقيم $l2: u\rightarrow=\langle 2,4,-1\rangle$

$v\rightarrow\cdot u\rightarrow=-5(2)+0+7(-1)=-17|v\rightarrow|=25+0+49=74|u\rightarrow|=4+16+1=21$

لتكن θ قياس الزاوية بين $u\rightarrow,v\rightarrow$ إذن:

$\theta=\cos-1(v\rightarrow\cdot u\rightarrow|v\rightarrow||u\rightarrow|)=\cos-1(-1774\times 21)\approx 115.5^{\circ}$

فيكون قياس الزاوية الحادة بين l1,l2 هو α حيث: $\alpha=180^{\circ}-115.5^{\circ}=64.5^{\circ}$

إذا كانت $(A(1,4,-5),B(3,0,2),C(-4,1,3)$، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(14) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AB↔.

⟨AB→=⟨2,−4,7⟩r→=⟨1,4,−5⟩+t⟨2,−4,7

(15) أكتب معادلة متجهة للمستقيم AC↔.

⟨AC→=⟨−5,−3,8⟩r→=⟨1,4,−5⟩+u⟨−5,−3,8

(16) إذا كان قياس ∠BAC=θ، فأثبت أن: θ=587138cos.

AB→|=4+16+49=69|AC→|=25+9+64=98AB→⋅AC→=2(−5)−4(−3)|
θ=AB→⋅AC→|AB→||AC→|=5869×98=5869×49×2=587+7(8)=58cos
138

(17) أجد مساحة المثلث ABC.

(ABC)=12|AB→|×|AC→θ=1−33646762=33987138Areaθ=1−cos2sin
θ=12×7138×33987138=33982|sin

(18) إذا كانت: r→=⟨3,−25,13⟩+t⟨4,5,−1⟩ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت النقطة V تقع على المستقيم l، حيث: OV¯⊥l فما إحداثيات النقطة V؟

V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: OV→=⟨3+4t,−25+5t,13−t⟩

اتجاه l هو: w→=⟨4,5,−1⟩

وبما أن OV¯⊥l إذن يكون:w→⋅OV→=0 ومنه:

3+4t)+5(−25+5t)−1(13−t)=0⇒t=3⇒OV→=⟨3+12,−25+15,13−3⟩)4
(⇒V(15,−10,10

يمر المستقيم l1 بالنقطتين: E وF، ويمر المستقيم l2 بالنقطتين: G وH. أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

(E(7,6,34),F(5,9,16),G(1,21,−2),H(−13,−14,19) (19

⟨EF→=⟨−2,3,−18⟩GH→=⟨−14,−35,21

نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{EF}=k\vec{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين:

معادلة l_1 هي: $\vec{r}=\langle 7,6,34\rangle+t\langle -2,3,-18\rangle$

معادلة l_2 هي: $\vec{r}=\langle 1,21,-2\rangle+u\langle -14,-35,21\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\langle 7-2t,6+3t,34-18t\rangle=\langle 1-14u,21-35u,-2+21u\rangle$$
$$7-2t=1-14u\Rightarrow -2t+14u=-6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$6+3t=21-35u\Rightarrow 3t+35u=15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$34-18t=-2+21u\Rightarrow 18t+21u=36 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$(1)\times 9+(3): u=-\frac{6}{49}, t=\frac{15}{7}$$
$$3\left(\frac{15}{7}\right)+35\left(-\frac{6}{49}\right)=2.14\neq 15$$

هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

20) $E(-3,-5,16), F(12,0,1), G(7,2,11), H(1,-22,23)$

$$\vec{EF}=\langle 15,5,-15\rangle \quad \vec{GH}=\langle -6,-24,12\rangle$$

بما أن النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير ثابتة، فإنه لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\vec{EF}=k\vec{GH}$ وهذا يعني أن المستقيمين غير متوازيين.

بتبسيط اتجاه $\vec{EF}$ بقسمته على 5 تكون معادلته: $\vec{r}=\langle -3,-5,16\rangle+t\langle 3,1,-3\rangle$

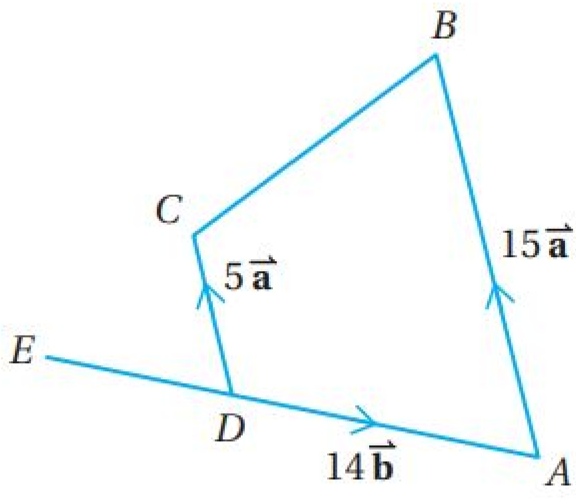
بتبسيط اتجاه $\vec{GH}$ بقسمته على 6 تكون معادلته: $\vec{r}=\langle 7,2,11\rangle+u\langle -1,-4,2\rangle$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:

$$\langle -3+3t,-5+t,16-3t\rangle=\langle 7-u,2-4u,11+2u\rangle$$
$$-3+3t=7-u\Rightarrow 3t+u=10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$-5+t=2-4u\Rightarrow t+4u=7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$16-3t=11+2u\Rightarrow 3t+2u=5 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$(3)-(1): u=-5\Rightarrow t=5$$

لكن هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

(21) في الشكل الرباعي ABCD الآتي، مد AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: AD=2 DE، إذا كـان: →DA→=14b، وكـان: →DC→=5a، وكـان: →AB→=15a، فأثبـت أن B,C,E تقع على استقامة واحدة.



AD=2DE⇒AD→=2DE→⇒DE→=12AD→=12(−14b→)=−7b→EC→=ED→+DC→=−DE→+DC→=7b→+5a→EB→=EA→+AB→=21b→+15a→=3(7→b→+5a→)⇒EB→=3EC

وهذا يعني أن →EB→∥EC

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها، إذن النقاط الثلاثة B,C,E تقع على استقامة واحدة.